Un model de deux fluides

Sarra MAAROUF, Laboratoire Jacques-Louis Lions

On considère un modèle de l'écoulement de deux fluides non miscibles, où la tension de l'interface entre les deux fluides est prise en compte. Le modèle est décrit par les équations de Navier-Stokes couplées avec l'équation de transport

$$\begin{cases} \rho(\varphi)\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) + \nabla p - \nabla\cdot(\nu(\varphi)\nabla\boldsymbol{u}) + \nabla\cdot T(\varphi) = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\times(0,T_f), \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,T_f), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,T_f). \end{cases} \tag{1}$$

La dernière équation signifie que l'interface $\Gamma(t)$ est déplacée par le fluide (voir [1] et [2]). On complète le problème par des conditions aux limites et initiales. La condition de Dirichlet est imposée sur la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la fonction de level set φ

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad \text{et} \qquad \varphi = \varphi_D \quad \text{sur } \ \Gamma_{\boldsymbol{u}}, \tag{2}$$

tel que

$$\Gamma_{\boldsymbol{u}} = \{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega;\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) < 0\},$$

et les conditions initiales

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{et} \quad \varphi(\boldsymbol{x},0) = \varphi_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{3}$$

ainsi les conditions sur l'interface,

$$[\boldsymbol{u}] = 0, \quad [\nu(\varphi)\partial_n\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{n}] = T\ \cdot\boldsymbol{n} \quad \text{sur } \Gamma(t),\ t\in(0,T_f),$$

tel que T est le tenseur, qui vient de la tension entre les deux fluides.

Dans ce travail, nous étudions les principales propriétés du modèle, et notamment l'existence de la solution. Ensuite, nous proposons une discrétisation par la méthode des caractéristiques en temps (en effet chaque équation contient un terme de convection) et éléments finis en espace. Nous effectuons l'analyse a priori du problème discret et prouvons des estimations presque optimales de l'erreur. Nous présentons enfin quelques expériences numériques qui confirment l'intérêt à la fois du modèle et sa discrétisation. Ce travail est fait en colaboration avec Christine Bernardi (UPMC) et Driss yakoubi (GIREF, univ. de LAVAL, canada).

Références

[1] P. Frey and T.T.M. Ta, *A numerical scheme based on level set method and anisotropic mesh adaptation for solving two-fluid flows.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, (2013), 1–28.

[2] G.-H. Cottet, E. Maitre and T. Milcent, *Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction*, Math. Model. Numer. Anal. 42 (2008), 471–492.

Sarra MAAROUF, Laboratoire JAcques-Louis Lions, Universit Pierre et Marie Curie, 4 place jussieu, 75252, Pais
`maarouf@ljll.math.upmc.fr`