# Outils probabilistes pour l'analyse numérique d'équations de transport (déterministes)

**Frédéric LAGOUTIÈRE**, Département de Mathématiques d'Orsay

Dans cet exposé, je décrirai quelques résultats obtenus ces dernières années avec François Delarue (université de Nice Sophia Antipolis) et Nicolas Vauchelet (université Pierre et Marie Curie). Ces résultats concernent l'ordre d'approximation de schémas de volumes finis de type *upwind*, ou, plus généralement, de schémas *diffusifs* pour des problèmes de Cauchy associés à des équations de transport comme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + a \cdot \nabla \rho = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ \rho(0,x) = \rho^0(x), \end{cases} \tag{1}$$

(voir [1]), ou

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (a\rho) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ \rho(0,x) = \rho^0(x), \end{cases} \tag{2}$$

(voir [2]), $a$ étant un champ de vitesses donné.
Nous verrons des techniques pour démontrer que l'ordre de convergence (en les pas d'espace et de temps associés au maillage) est 1/2 (c'est optimal) lorsque la donnée initiale du problème de Cauchy, le champ de vitesses, ou le maillage, est peu régulier.
Les techniques que nous proposons sont probabilistes, et fondées sur une réinterprétation du schéma, déterministe, comme l'espérance d'un schéma aléatoire. Cette réinterprétation met en évidence l'existence de courbes caractéristiques numériques liées au schéma, ainsi que de formules de représentation de la solution numérique au moyen de ces caractéristiques, formules qui sont le pendant discret des formules de représentation des solutions des problèmes de Cauchy :

$$\rho(t,x) = \rho^0(X(0,t,x)) \quad \text{dans le cas de l'équation (1)},$$

$$\rho(t) = X(t,0,\cdot)\sharp\rho^0 \quad \text{dans le cas de l'équation (2)},$$

où $X$ est le flot caractéristique, solution de

$$\begin{cases} \partial_s X(s,t,x) = a(s, X(s,t,x)), \quad s \in \mathbb{R}, \\ X(t,t,x) = x. \end{cases}$$

Un autre intérêt de ces réinterprétations des schémas est de donner un sens clair à la notion de *diffusion numérique*, celle-ci pouvant être donc vue comme le résultat de l'alea du schéma aléatoire sous-jacent dont l'algorithme est l'espérance (de la même manière que l'opérateur laplacien de diffusion est le résultat d'un mouvement brownien). Nous verrons, progressivement, comment l'ordre 1/2 peut être montré

- dans des cas simples par utilisation de la formule de Stirling ou de Moivre,
- dans des cas un peu plus généraux, avec le théorème-limite central,
- enfin, en toute généralité, avec des estimations de type martingales.

### Références

[1] François Delarue, Frédéric Lagoutière, *Probabilistic analysis of the upwind scheme for transport equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 199 (2011), no. 1, 229–268.

[2] François Delarue, Frédéric Lagoutière, Nicolas Vauchelet, *Convergence order of upwind type schemes for transport equations with discontinuous coefficients*, hal-01273848v1 (2016).

**Frédéric LAGOUTIÈRE**, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France.
frederic.lagoutiere@math.u-psud.fr