# Développements formels d'un système différentiel présentant une variété centrale

**François CASTELLA**, Université de Rennes 1

**Philippe CHARTIER**, INRIA

**Julie SAUZEAU**, Université de Rennes 1

**Mots-clés :** Variété centrale, Shadowing principle, Changement de variables, B-séries, Arbres, Produit de composition, Forme normale, Modèle réduit.

On étudie le système différentiel partitionné suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \varepsilon f\left(x, z\right) \\ \dot{z} & = & -z + \varepsilon g(x, z) \end{cases} \tag{1}$$

avec conditions initiales $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. On note $\Psi_t^{(f,g)}$ le flot lié à cette équation différentielle.

La théorie des variétés centrales donne l'existence, pour $\varepsilon$ suffisamment petit, d'une fonction $\varepsilon h(x)$ telle que la solution de (1) est approchée en $\mathcal{O}\left(e^{-\mu t}\right)$ $(\mu > 0)$ par la solution de :

$$\begin{cases} \dot{x}^\infty & = & \varepsilon f\left(x^\infty, \varepsilon h(x^\infty)\right) = \varepsilon F(x^\infty) \\ z^\infty & = & \varepsilon h(x^\infty) \end{cases} \tag{2}$$

avec $x^\infty(0) = x_0^\varepsilon$ une perturbation de $x_0$. Se posent alors deux problèmes : calculer $\varepsilon h$ et $x_0^\varepsilon$. La réponse à la première question est connue : on approche $\varepsilon h$ en le développant en une série formelle en $\varepsilon$, et chaque terme de la série est solution d'une équation aux dérivées partielles. Par contre, on ne dispose d'aucun outil pour approcher $x_0^\varepsilon$. On note $\Phi_0^{-1}$ la fonction telle que $\Phi_0^{-1}(x_0, z_0) = (x_0^\varepsilon, z_0)$. Le premier apport de notre travail est d'adapter la théorie des B-séries à ce contexte pour construire un développement en $\varepsilon$ de cette quantité clé $x_0^\varepsilon$. On obtient ce faisant un développement de $\varepsilon h$ et des autres fonctions en présence.

Dans une seconde partie, nous allons plus loin. En effet, le théorème de variété centrale apporte une approximation en $\mathcal{O}\left(e^{-\mu t}\right)$ de la solution de (1) et ne donne aucune information pour $t$ proche de 0. Nous montrons qu'il existe un changement de variables $\Phi_t$ et une fonction $G(x, z)$ tels que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}^\infty & = & \varepsilon F(x^\infty) \\ \dot{\tilde{z}} & = & \varepsilon G(x^\infty, \tilde{z}) \end{cases} \tag{3}$$

vérifie :

$$\Psi_t^{(f,g)}(x_0, y_0) = \left(\Phi_t \circ \Psi_t^{(F,G)} \circ \Phi_0^{-1}\right)(x_0, y_0). \tag{4}$$

où $\Psi_t^{(F,G)}$ désigne le flot associé à (3). Nous obtenons des développements explicites à tout ordre de toutes ces quantités, ce qui nous permet de les implémenter numériquement.

**François CASTELLA**, IRMAR, 263 avenue du général Leclerc, 35000 RENNES
`francois.castella@univ-rennes1.fr`
**Philippe CHARTIER**, INRIA, 263 avenue du général Leclerc, 35000 RENNES
`philippe.chartier@inria.fr`
**Julie SAUZEAU**, IRMAR, 263 avenue du général Leclerc, 35000 RENNES
`julie.sauzeau@univ-rennes1.fr`