Quasi-réversibilité itérée : applications aux problèmes de complétion de données elliptiques et paraboliques.

Jérémi Dardé, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Toulouse III

Dans ce travail, on étudie une extension de la méthode de quasi-réversibilité [1], précisément *la méthode de quasi-réversibilité itérée*, pour résoudre des problèmes inverses de complétion de données elliptiques et paraboliques. Mathématiquement, on considère $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert de produits scalaires respectifs $(.,.)_{\mathcal{X}}$ et $(.,.)_{\mathcal{Y}}$, et un opérateur $A : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ linéaire et continu tel que $\mathcal{N}(A) = \{0_{\mathcal{X}}\}$, $\mathcal{R}(A) \neq \mathcal{Y}$ et $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{Y}$. Le problème inverse en question est alors : pour $y \in \mathcal{Y}$, trouver $x_s \in \mathcal{X}$ tel que $Ax_s = y$. Il est clair que ce problème est mal posé.

La méthode de quasi-réversibilité est une méthode de régularisation de ce problème: soit $b(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique positive telle que $\|Ax\|_{\mathcal{Y}} + b(x,x) \geq c\|x\|_X$ pour tout x dans $\mathcal{X}$. Pour $\varepsilon > 0$, on cherche x_ε élément de $\mathcal{X}$ vérifiant $(Ax_\varepsilon, Ax)_{\mathcal{Y}} + \varepsilon\ b(x_\varepsilon, x) = (f, Ax)_{\mathcal{Y}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}$. Ce problème est bien posé : x_ε existe et est unique, et $x_\varepsilon \xrightarrow[\mathcal{X}]{\varepsilon \to 0} x_s$ si x_s existe, la convergence étant monotone.

La quasi-réversibilité itérée consiste à résoudre itérativement de nouveaux problèmes de quasi-réversibilité, chacun dépendant de la solution du précédent : plus précisément, on définit $X_\varepsilon^{-1} = 0$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, X_ε^M vérifie

$$(AX_\varepsilon^M, Ax)_{\mathcal{Y}} + \varepsilon\ b(X_\varepsilon^M, x) = (f, Ax)_{\mathcal{Y}} + \varepsilon\ b(X_\varepsilon^{M-1}, x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on montre que $X_\varepsilon^M \xrightarrow[\mathcal{X}]{M \to \infty} x_s$ en montrant en particulier que X_ε^M s'écrit comme une somme de x_ε et de ses M premières dérivées par rapport à ε. Comme la convergence a lieu *pour tout choix du paramètre de régularisation* ε, on peut choisir le paramètre grand, et obtenir ainsi un meilleur conditionnement des problèmes à résoudre. Enfin, en présence d'une donnée bruitée, cas pertinent en pratique, on propose un critère pour choisir le nombre de problèmes itérés à résoudre en fonction du niveau de bruit pour avoir à la fois stabilité et convergence.

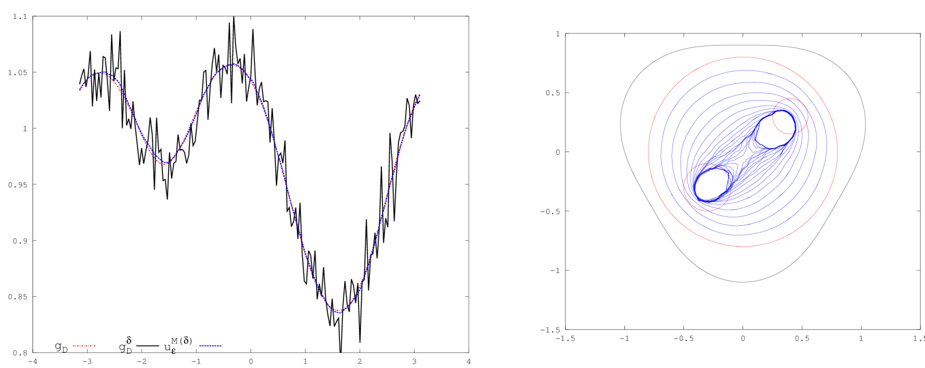

Figure 1: Deux exemples d'applications de la quasi-réversibilité itérée : à gauche, reconstruction d'une donnée de Dirichlet bruitée pour un problème elliptique [2], à droite, reconstruction de deux inclusions par *approche par l'extérieur* pour un problème parabolique.

Références

[1] R. Lattès et J. L. Lions, *The Method of Quasi-reversibility: Applications to Partial Differential Equations*, American Elsevier Publishing Company, 1969.

[2] J. Dardé, *Iterated quasi-reversibility method applied to elliptic and parabolic data completion problems*, Inverse Problems and Imaging, accepté (nov. 2015).

Jérémi Dardé, Institut de Matématiques de Toulouse, Université Toulouse III, 118, route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9
`jeremi.darde@math.univ-toulouse.fr`