Développement et analyse d'un schéma CVFE pour l'équation de Richards

__Ahmed AIT HAMMOU OULHAJ__, Université Lille 1

Claire Chainais-Hillairet, Université Lille 1

Clément Cancès, Inria Lille

L'écoulement dans un milieu poreux ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) insaturé est décrit par l'équation de Richards suivante:

$$\begin{cases} \partial_t s(p) - \nabla.(\eta(s(p))\Lambda(\nabla p - \mathbf{g})) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0, t_f), \\ s(p)_{|t=0} = s_0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \eta(s(p))\Lambda(\nabla p - \mathbf{g}).\mathbf{n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, t_f) \end{cases} \tag{1}$$

où la fonction s liant la pression p et la saturation $s(p)$ est croissante (au sens large), et à valeur dans $[0, 1]$. Le champ de perméabilité intrinsèque $\Lambda : \Omega \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est uniformément elliptique et symétrique, mais possiblement anisotrope. $\mathbf{g}$ représente la gravité. La fonction de mobilité η est croissante et vérifie $\eta(0) = 0$ et $\eta(s) > 0$ si $s \neq 0$, si bien que (1) est un problème parabolique dégénéré.

Nous proposons un schéma CVFE (Control Volume Finite Element) non-linéaire pour approcher la solution de (1). En particulier les degrés de liberté sont affectés aux sommets du maillage triangulaire primal, tandis que les équations de bilan sont discrétisées sur un maillage dual barycentrique. La mobilité η est gérée à l'aide d'une procédure de décentrement qui autorise les transmissivités négatives et donc les pertes de monotonie. Ce schéma est une extension au cas de l'équation de Richards du problème étudié dans [1].

Le schéma que nous proposons possède quelques propriétés remarquables. En particulier il permet de traiter le cas anisotrope contrairement au schéma proposé dans [2]. Pour nôtre schéma nous montrerons d'abord, qu'il est non-linéairement stable, grâce à un contrôle de l'énergie physique, qu'il admet (au moins) une solution discrète et que la saturation est bornée entre 0 et 1. Ensuite nous montrerons, sous l'hypothèse faible de régularité sur le maillage, que la solution discrète converge vers la solution faible du problème continu (1). Enfin, en vue de mettre en évidence l'efficacité, la stabilité et la robustesse du schéma, nous présenterons des tests numériques dans des cas isotropes et anisotropes.

Références

[1] C. Cancs and C. Guichard, *Convergence of a nonlinear entropy diminishing control volume finite element scheme for solving anisotropic degenerate parabolic equations*, Math. Comp., 2016, 85(298), pp. 549-580.

[2] R. Eymard, M. Gutnic, and D. Hilhorst, *The finite volume method for Richards equation*, Comput. Geosci., 3(3-4):259294, 1999.

Ahmed AIT HAMMOU OULHAJ, Université de Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé, Cité Scientifique 59650 Villeneuve d'Ascq
ahmed.ait-hammou-oulhaj@math.univ-lille1.fr