

# Couplage du pararéel avec les méthodes de décomposition de domaine : Application à la résolution d'équation d'advection-diffusion

**Rim GUETAT**, Faculté des Sciences de Tunis.

**Yvon MADAY**, Laboratoire Jacques Louis Lions.

**Saloua AOUADI**, Faculté des Sciences de Tunis.

**Mots-clés :** Calcul parallèle, équation aux dérivées partielles, algorithme du pararéel, méthodes de décomposition de domaine, Schwarz de type relaxation d'ondes, préconditionnement.

La modélisation des phénomènes évolutifs conduit généralement à la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP), fonctions de deux variables espace et temps. La résolution numérique de ces EDP dans le cadre de la méthode des éléments finis conduit à des maillages très fins et à des systèmes linéaires de très grande taille, pour lesquels aucun ordinateur n'aurait suffisamment de place mémoire. L'intégration d'un système d'équations différentielles à une échelle temporelle très fine c'est-à-dire avec un grand nombre d'intervalles de temps engendre un cout de calcul souvent prohibitif. Dans ce contexte, les calculateurs à architecture parallèle, sont devenus un outil majeur pour le calcul scientifique appelé "parallèle" qualifié de Haute Performance. Une famille de méthodes se prêtant bien au calcul parallèle à travers l'espace est connue sous le nom de méthodes de décomposition de domaine (MDD) [1]. L'avènement des calculateurs à architecture parallèle a dépassé largement la possibilité de parallélisation à travers l'espace. Bien que la résolution en temps est naturellement séquentielle, les recherches se sont dirigés vers le parallélisme à travers le temps. Pour profiter d'une architecture parallèle, l'algorithme pararéel introduit en 2001 par Lions, Maday, Turinici [2], généralise un concept bien connu dans les méthodes de décomposition de domaine en combinant des résolutions grossières et des résolutions fines et indépendantes en temps. L'objet de notre recherche est de coupler de manière efficace le pararéel avec MDD au fait qu'on se limite à chaque itération  $k$  du pararéel à un nombre réduit  $P$  d'itérations par sous-domaine spatial et d'obtenir après convergence une solution aussi précise que la solution fine pure séquentielle monodomaine. L'algorithme pararéel est de type prédicteur-correcteur basé sur deux niveaux de solveurs (un solveur fin et un solveur grossier). Pour la mise en oeuvre de ses deux solveurs nous avons recours aux MDD sans recouvrement, où le problème condensé à l'interface est résolu par une méthode de Krylov de type GMRES. Le point clé réside dans l'écriture des conditions d'interface espace-temps qui mènent à une convergence rapide. Nous étudions l'aspect numérique et algorithmique de la méthode couplée: Au niveau du propagateur fin, on a appliqué la méthode du complément de Schur. L'utilisation des préconditionneurs au niveau du propagateur grossier de type Neumann-Neumann, FETI et Robin-Robin sont nécessaires pour l'accélération de la convergence. Des simulations numériques sur l'équation d'advection-diffusion illustrent les performances de l'algorithme couplé. Dans le cadre théorique, nous présentons l'analyse rigoureuse de convergence de l'algorithme pararéel couplé avec l'algorithme Schwarz de type relaxation d'ondes (SWR) utilisé pour la résolution fine pour deux sous-domaines qui se recouvrent [3]. Cette étude est menée en une dimension en espace. On a montré afin d'obtenir un schéma en temps pararéel couplé d'ordre  $k$  il suffit que le facteur de convergence de l'algorithme SWR " $\rho(P)$ " est d'ordre  $\Delta T^{5/2}$ , avec  $\Delta T$  le pas de temps grossier. Des expériences numériques confirment notre analyse.

## Références

- [1] M. J. GANDER S. VANDEWALLE , *Analysis of the parareal time-parallel time-integration method*, *SIAM J. Sci. Comput.*, 29, 556-578, 2007.
- [2] J.-L. LIONS Y. MADAY G. TURINICI , *Résolution d'EDP par un schéma en temps pararéel*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332, 7, 661-668, 2001.
- [3] R. GUETAT, *Méthode de parallélisation en temps: Application aux méthodes de décomposition de domaine*, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 16 décembre 2011.

**Rim GUETAT**, Département mathématique, Faculté des Sciences de Tunis, Université de Tunis El Manar, 2060 Tunis, Tunisie.

rymguetat@yahoo.fr