Méthodes de type Petrov-Galerkin pour des problèmes d'advection diffusion non coercifs

François Madiot, CERMICS, École des Ponts ParisTech, Équipe-projet MATHERIALS, INRIA

Claude Le Bris, CERMICS, École des Ponts ParisTech, Équipe-projet MATHERIALS, INRIA

Frédéric Legoll, Navier, École des Ponts ParisTech, Équipe-projet MATHERIALS, INRIA

Les équations d'advection diffusion interviennent dans la modélisation de divers phénomènes physiques, tel que le transport de polluants dans un fluide. Il existe de nombreuses applications dans lesquelles la convection domine sur la diffusion. D'un point de vue numérique, ce régime nécessite d'utiliser des méthodes de stabilisation. Dans ce travail, on se place dans un cadre général où l'opérateur d'advection-diffusion est possiblement non-coercif. Les méthodes éléments finis classiques sont bien posées pour un pas de maillage suffisamment petit, et convergentes [5]. Cependant, il est en général difficile d'estimer le seuil de pas de maillage au dessous duquel le problème est bien posé. De plus, à notre connaissance, l'analyse des méthodes usuelles de stabilisation (de type *Streamline Upwind Petrov Galerkin*, SUPG) a été faite dans le cas coercif uniquement [4].
Plusieurs stratégies numériques ont été proposées pour ce type de problèmes (cf par exemple [3, 2]), mais aucune ne s'impose à l'heure actuelle.
Dans ce travail, on propose une méthode éléments finis de type Petrov-Galerkin basée sur une mesure invariante associée à l'opérateur adjoint. La notion de mesure invariante a déjà été utilisée (entre autres) pour des modèles de semiconducteurs où le champ de convection a la particularité de dériver d'un gradient [1]. On considère un champ de convection général, dans le cas non-coercif et convection-dominée. On discutera du choix et du calcul de la mesure invariante, et on montrera que la méthode proposée est bien posée, *uniformément en la taille du maillage*. Les résultats numériques seront comparés à une méthode standard de stabilisation SUPG en terme de précision et de coûts de calcul.

Références

[1] Brezzi, F. et Marini, L. D. et Pietra, P., *Two-dimensional exponential fitting and applications to drift-diffusion models*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1989.

[2] Demkowicz, L. et Gopalakrishnan, J., *A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. II. Optimal test functions*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2011.

[3] Droniou, J. et Gallouët, T., *Finite volume methods for convection-diffusion equations with right-hand side in H^{-1}*, M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2002.

[4] Roos, H.-G. et Stynes, M. and Tobiska, L., *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations: Convection-Diffusion and Flow Problems*, Springer, 1991.

[5] Schatz, A. H., *An Observation Concerning Ritz-Galerkin Methods with Indefinite Bilinear Forms*, Mathematics of Computation, 1974.

François Madiot, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`madiotf@cermics.enpc.fr`
Claude Le Bris, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`lebris@cermics.enpc.fr`
Frédéric Legoll, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`legoll@lami.enpc.fr`