Traitement des conditions de réflexion dans la résolution de l'équation du transfert radiatif 3D par éléments finis

David LE HARDY, LTN UMR CNRS 6607 Université de Nantes

Yann FAVENNEC, LTN UMR CNRS 6607 Université de Nantes

Benoît ROUSSEAU, LTN UMR CNRS 6607 Université de Nantes

La caractérisation des propriétés radiatives de matériaux semi-transparents requiert, entre autres, de résoudre l'équation intégro-différentielle de Boltzmann sous l'hypothèse de Lorentz [1]. Cette équation, en régime stationnaire, est définie par :

$$\boldsymbol{s} \cdot \nabla I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) + \beta I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = \sigma_s \int_{4\pi} \Phi(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}') I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}') \, \mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{s}') + \kappa I_b(T) \tag{1}$$

où l'inconnue I, la luminance, possède une dépendance spatiale $\boldsymbol{x}$ et directionnelle $\boldsymbol{s}$. Les paramètres β, σ_s, $\Phi(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}')$ et $\kappa I_b(T)$ sont supposés connus et peuvent aussi varier dans l'espace. L'équation (1), connue sous le nom d'équation du transfert radiatif, comporte un terme de transport, de réaction, et d'émission propre. Les propriétés radiatives d'un matériau vont être liées à l'organisation de la matière en son volume et aussi à ses bords. En particulier en fonction des paramètres de rugosité ramenés à la longueur d'onde incidente, les bords en question pourront réfléchir le rayonnement selon trois grands comportements :(i) spéculaire si les surfaces sont toutes optiquement polies (ii) diffus isotrope (iii) spécularo-diffus ce qui le cas de la plupart des matériaux.

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = \tilde{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) + (1-\alpha)\frac{1-\rho_d}{\pi} \int_{\boldsymbol{s}' \cdot \boldsymbol{n} > 0} I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}') \boldsymbol{s}' \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\boldsymbol{s}' + \alpha \rho_s (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}) I(\boldsymbol{x}, \zeta(\boldsymbol{s})) \tag{2}$$

Pour prendre en compte le terme intégrale de l'équation (1), la sphère unité est discrétisée en N_d directions $\boldsymbol{s}_m$. L'équation (1) devient alors un système semi-discret de N_d équations à N_d inconnues $I_m(\boldsymbol{x}) = I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}_m)$. Cette méthode, dite des ordonnées discrètes [1], est populaire dans la communauté radiative pour l'approximation de l'intégrale présente dans l'équation (1):

$$\boldsymbol{s}_m \cdot \nabla I_m(\boldsymbol{x}) + \beta I_m(\boldsymbol{x}) = \sigma_s \sum_{j=1}^{N_d} \omega_j \Phi_{m,j} I_j(\boldsymbol{x}) + \kappa I_b(T) \quad \forall m = 1, \ldots, N_d \tag{3}$$

Pour la résolution en espace, la méthode éléments finis décentrés SUPG [2] est utilisée. La méthode SUPG transforme le système (3) en un système linéaire $Ax = b$. La méthode itérative Gauss-Siedel par bloc est utilisée pour résoudre ce système.

Comme l'espace des directions est discrétisé, les conditions aux limites continues (2) deviennent des conditions aux limites discrètes. Dans cette présentation, le traitement des conditions de réflexion spéculaire, représentées par $\rho_s(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}) I(\boldsymbol{x}, \zeta(\boldsymbol{s}))$, sera présenté. La réflexion spéculaire, régit par la loi de Fresnel [3], représente la majeure difficulté pour le traitement des conditions aux limites, notamment lorsque la géométrie de l'espace est complexe. La résolution numérique étant de plus gourmande en temps de calcul et place mémoire, des stratégies de parallélisation, notamment pour la résolution du système linéaire, sont mises en place pour accelérer au mieux le temps de calcul avec un stockage de mémoire raisonnable.

Références

[1] JR. Howell et al., *Thermal radiation heat transfer*, CRC Press Taylor & Francis, 2010

[2] D. Le Hardy et al, *Solution of the 2-D steady-state radiative transfer equation in participating media with specular reflections using SUPG and DG finite elements*, JQSRT (en soumission)

[3] A Fresnel *Oeuvres complètes d'Augustin Fresnel*, Imprimerie Impériale, 1866

David LE HARDY, LTN rue Christian Pauc - CS 50609 - 44306 Nantes cedex 3
david.le-hardy@univ-nantes.fr
Yann FAVENNEC, LTN rue Christian Pauc - CS 50609 - 44306 Nantes cedex 3
yann.favennec@univ-nantes.fr
Benoît ROUSSEAU, LTN rue Christian Pauc - CS 50609 - 44306 Nantes cedex 3
benoit.rousseau@univ-nantes.fr