Contrôlabilité d'une équation parabolique semi-discrétisée en espace par la méthode des moments

Damien ALLONSIUS, Aix-Marseille Université

Mots-clés : contrôle discret, équations paraboliques, opérateur de Sturm-Liouville, méthode des moments.

On s'intéresse à la contrôlabilité à zéro en un temps $T > 0$ donné d'une équation parabolique semi-discrétisée en espace, en dimension 1. Étant donnée $\mathcal{A}^h$ une discrétisation de l'opérateur elliptique symétrique $\mathcal{A} := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x \cdot) + q(x)\cdot$ sur un espace fonctionnel discret E^h, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} y^{h'}(t) + \mathcal{A}^h y^h(t) = \mathcal{B}^h u^h(t), \text{ pour } 0 < t \leq T \\ y_0^h(t) = 0,\ y_{N+1}^h(t) = C v^h(t), \text{ pour } 0 < t \leq T, \\ y^h(0) = y^{0,h} \in E^h. \end{cases} \tag{1}$$

On étudie à la fois le cas d'un contrôle distribué ($C = 0$, $\mathcal{B}^h = 1_\omega$, $u_h(t) \in E^h$) ou au bord ($\mathcal{B}^h = 0$, $C = 1$, $v^h(t) \in \mathbb{R}$) en se basant sur la méthode des moments ou ses variantes (voir [3]) adaptées au cas discret.

Dans le cas où $\gamma = 1$ et avec une discrétisation uniforme, on obtient la contrôlabilité à zéro interne et au bord du problème de contrôle (1) avec une borne uniforme en h sur les contrôles discrets u^h et v^h. La méthode consiste à introduire une famille biorthogonale à la famille $(e^{-\mu_j^h t})_j$ où $(\mu_j^h)_j$ décrit l'ensemble du spectre du laplacien discret auquel on concatène les valeurs propres de l'opérateur laplacien continu. Ce travail constitue donc une extension de [4] où un résultat analogue est prouvé mais uniquement pour le problème de contrôle frontière et dans le cas $q = 0$, $\gamma = 1$ sur maillage uniforme. Ces auteurs utilisent les formules explicites pour les éléments propres de l'opérateur $\mathcal{A}^h$ dont on ne dispose plus ici.

Dans le cas général, on ne parvient pas à prouver des bornes uniformes pour le contrôle à zéro de ces systèmes (on sait d'ailleurs que ce résultat ne peut être vrai en 2D). Néanmoins, une solution alternative consiste à amener la solution y^h au temps T vers une cible exponentiellement petite, à l'aide de contrôles uniformément bornés. Pour cela, on traite séparément dans l'analyse les basses fréquences et les hautes fréquences. On retrouve en particulier, dans ce contexte monodimensionnel, les résultats de [2] (obtenus par des inégalités de Carleman discrètes) mais par une approche plus élémentaire.
Des simulations numériques illustrerons nos propos, basés sur la méthode HUM pénalisée présentée dans [1] dans le cas du contrôle interne et adaptée ici au cas du contrôle frontière.

Références

[1] F. Boyer *On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems*, ESAIM Proceedings, Vol. 41, 2013

[2] F. Boyer, F. Hubert et J. Le Rousseau, *Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations*, SIAM J. on Control and Optimization, Vol. 48, no. 8, 2010.

[3] H. O. Fattorini et D. L. Russell, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math., Vol. 32, 1974/75.

[4] A. Lopez et E. Zuazua, *Some new results related to the null controllability of the 1-d heat equation*, Séminaire EDP, Ecole Polytechnique, 1997–1998.

Damien ALLONSIUS, I2M, CMI, 39, rue F. Joliot Curie 13453 Marseille Cedex 13
`damien.allonsius@univ-amu.fr`
Franck BOYER, IMT, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9
`franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`
Morgan MORANCEY, I2M, CMI, 39, rue F. Joliot Curie 13453 Marseille Cedex 13
`morgan.morancey@univ-amu.fr`