Analyse asymptotique d'un problème parabolique contenant un terme de transport raide.

Thomas BLANC, I2M, Université d'Aix-Marseille

Mihai BOSTAN, I2M, Université d'Aix-Marseille

Franck BOYER, IMT, Université de Toulouse

Mots-clés : Analyse multi-échelles, Homogénéisation, Théorie ergodique, Schéma semi-Lagrangien.

Ce travail a pour objet l'analyse asymptotique d'une équation de diffusion contenant un opérateur de transport raide. On cherche à étudier le comportement de la famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ lorsque ε tend vers 0, où u^ε est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \mathrm{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}\, b(y)\cdot\nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0,y) = u^{\mathrm{in}}(y), & y\in\mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1}$$

où D est un champ de matrices symétriques positives, b est un champ de vecteurs régulier à divergence nulle et où la donnée initiale u^{in} n'est pas nécessairement bien préparée ($b\cdot\nabla_y u^{\mathrm{in}}$ non nécessairement nul). Une telle problèmatique est motivée par l'étude des différents régimes asymptotiques associés aux modéles linéaires décrivant le transport de particules dans un plasma fortement magnétisé. Un exemple de tel problème est donné par l'équation de Fokker-Planck, le transport singulier modélise alors les variations rapides des particules autour des lignes de champs magnétiques et l'opérateur de diffusion les collisions entre particules. Du point de vue numérique, la résolution de ces problèmes est fortement contrainte par la présence d'un opérateur singulier. L'idée pour surmonter cette difficulté est de déterminer un système limite homogénéisé n'étant plus contraint par le petit paramètre ε, et pour lequel les méthodes classiques de résolution peuvent s'appliquer.

La réponse proposée dans [1] est basée sur le filtrage des oscillations dues au transport rapide le long des courbes caractéristiques associées à b. On remarque que, contrairement aux u_ε, les solutions filtrées sont stables et vérifient un nouveau problème parabolique à deux échelles en temps, la matrice de diffusion de ce problème apparaît comme étant une translation du champ D le long d'un groupe d'opérateurs à un paramètre $(G(s))_{s\in\mathbb{R}}$. Un procédé d'homogénéisation à deux échelles nous améne à un système limite qui se trouve être de nouveau une équation de diffusion. Le champ de diffusion homogénéisé associé $\langle D\rangle$ peut être vu comme une projection de D, par rapport à un produit scalaire judicieusement choisi, sur le sous espace des éléments fixés par le groupe. On montre la convergence forte des solutions filtrées vers la solution du modèle homogénéisé à l'aide d'un résultat de convergence à deux échelles avec variable rapide non périodique. L'introduction d'un correcteur nous donne un ordre de convergence. Des résultats numériques concernant le calcul du champ $\langle D\rangle$ seront donnés. Ceux ci sont basés sur le théorème de Von Neumann qui donne une expression explicite de $\langle D\rangle$ comme une moyenne ergodique de D le long du groupe d'opérateurs $(G(s))_{s\in\mathbb{R}}$

$$\langle D\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T G(s)D\,\mathrm{d}s$$

Le groupe ayant pour générateur infinitésimal un opérateur de transport-réaction, on choisit un schéma semi-Lagrangien pour faire sa résolution.

Références

[1] T. Blanc, M. Bostan, F. Boyer, *Asymptotic analysis of parabolic equations with stiff transport terms by a multi-scale approach*, submitted, 2015, <hal-01242679>.

Thomas BLANC, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France
thomas.blanc@univ-amu.fr
Mihai BOSTAN, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France
mihai.bostan@univ-amu.fr
Franck BOYER, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, IMT, UMR 5219, 31062 Toulouse, France
franck.boyer@math.univ-toulouse.fr