Propriétés de convergence forte du schéma de Ninomiya-Victoir et utilisation de ce schéma en multilevel Monte Carlo

Anis AL GERBI, Cermics (ENPC)

Emmanuelle CLÉMENT, Cermics (ENPC)

Benjamin JOURDAIN, LAMA (UPEMLV)

L'objectif de la méthode Multilevel Monte Carlo, introduite par Giles [2], est de réduire la complexité de l'estimation de l'espérance $\mathbb{E}\left[f\left(X_T\right)\right]$, où X est solution d'une équation différentielle stochastique multidimensionnelle, f une fonction de payoff régulière et T un temps terminal, sous contrainte de précision, notée ϵ. La précision de l'estimateur est mesurée par son erreur quadratique. L'estimateur Multilevel Monte Carlo consiste à discrétiser l'équation différentielle stochastique à l'aide d'un schéma numérique X^l et à combiner plusieurs grilles de discrétisation. En écrivant:

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_T^L\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^0\right)\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[f\left(X_T^l\right) - f\left(X_T^{l-1}\right)\right]$$

l'estimateur Multilevel Monte Carlo est donné par l'estimation du membre de droite dans l'égalité précédente, c'est-à-dire:

$$\hat{Y}_{MLMC} = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{M_l} \sum_{k=1}^{M_l} Z_k^l$$

où les variables aléatoires $\left(Z_k^l\right)_{0\leq l\leq L, 1\leq k\leq M_l}$ sont indépendantes et vérifient:

$$\forall k \in \{1, \ldots, M_0\}, \mathbb{E}\left[Z_k^0\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^0\right)\right]$$

et:

$$\forall l \in \{1, \ldots, L\}, \forall k \in \{1, \ldots, M_l\}, \mathbb{E}\left[Z_k^l\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^l\right) - f\left(X_T^{l-1}\right)\right].$$

Le choix du niveau de discrétisation le plus fin, noté L, est dirigé par le biais du schéma numérique. Le nombre de tirages pour chaque niveau de discrétisation, noté M_l, est une fonction croissante des variances des variables aléatoires Z_k^l. En outre, les quantités M_l sont choisies afin de minimiser le temps de calcul, pour une précision fixée. Pour le choix naturel:

$$Z_k^l = f\left(X_T^l\right) - f\left(X_T^{l-1}\right)$$

où les deux schémas sont dirigés par le même mouvement brownien, la variance de Z_k^l est reliée à l'erreur forte du schéma. Pour un schéma d'ordre fort 1/2, dans le cas d'un schéma d'Euler par exemple, nous avons une complexité en $O\left(\epsilon^{-2}\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^2\right)$. En revanche, pour un schéma d'ordre fort strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ nous avons une complexité en $O\left(\epsilon^{-2}\right)$. En vue d'utiliser, dans la méthode Multilevel Monte Carlo, le schéma d'ordre faible 2, proposé par Ninomiya et Victoir, nous avons donc analysé l'erreur forte de ce schéma. Giles et Szpruch [3] ont récemment proposé un schéma numérique ainsi qu'un couplage dit antithétique avec:

$$Z_k^l = \frac{1}{2}\left(f\left(X_T^{l,k}\right) f\left(\tilde{X}_T^{l,k}\right)\right) - f\left(X_T^{l-1,k}\right)$$

dans lequel $\tilde{X}_T^{l,k}$ est obtenu à l'aide du même schéma numérique que pour $X_T^{l,k}$, mais en transposant les paires d'accroissements brownien successifs. Cela permet à la variance de décroitre à l'ordre 2 et ainsi d'attendre la complexité $O\left(\epsilon^{-2}\right)$. Afin d'adapter cette méthode antithétique, dans [1], nous proposons un couplage à l'ordre fort 1 entre les schémas de Giles-Szpruch et le schéma de Ninomiya-Victoir [4]. Enfin, nous présentons une version améliorée de la méthode de Monte Carlo antithétique qui utilise le couplage précédent, permettant de garder la complexité $O\left(\epsilon^{-2}\right)$ et de profiter de l'erreur faible d'ordre 2 du schéma de Ninomiya-Victoir.

Références

[1] A. Al Gerbi, B. Jourdain, E. Clément, *Ninomiya-Victoir scheme: strong convergence, antithetic version and application to multilevel estimators*, arXiv:1508.06492, 2015.

[2] M.B. Giles, *Multi-level Monte Carlo path simulation*, Operations Research, 56(3):607-617, 2008.

[3] M.B. Giles, L. Szpruch, *Antithetic multilevel Monte Carlo estimation for multi-dimensional SDEs without Lévy area simulation*, Annals of Applied Probability, 24(4):1585-1620, 2014.

[4] S. Ninomiya, N. Victoir, *Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing*, Applied Mathematical Finance 15, 107-121, 2008.

Anis AL GERBI, Université Paris-Est, Cermics (ENPC), INRIA, F-77455, Marne-la-Vallée, France
anis.al-gerbi@enpc.fr
Emmanuelle CLÉMENT, Université Paris-Est, Cermics (ENPC), INRIA, F-77455, Marne-la-Vallée, France
jourdain@cermics.enpc.fr
Benjamin JOURDAIN, Université Paris-Est, LAMA (UMR 8050), UPEMLV, UPEC, CNRS, F-77454, Marne-la-Vallée, France
emmanuelle.clement@u-pem.fr