

Diffusion généralisée en dynamique de population

Alexandre THOREL, Université du Havre

Rabah LABBAS, Université du Havre

Stéphane MAINGOT, Université du Havre

David MANCEAU, Université du Havre

Mots-clés : semi-groupe analytique, espaces d'interpolation, calcul fonctionnel.

On étudie un modèle stationnaire linéarisé de diffusion généralisée en dynamique de population modélisé par l'équation

$$k_2 \Delta^2 u - k_1 \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

où $k_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $k_2 \in \mathbb{R}^*$ et u est la densité de population. Dans ce modèle, obtenu dans [2, 4], le terme biharmonique représente la dispersion induite par les interactions à longue portée, alors que le laplacien ne traduit que la dispersion à courte portée. Les théorèmes de régularité elliptique classiques entraînent l'existence d'une solution $u \in H^2(\Omega)$ de (1) lorsque $f \in L^2(\Omega)$ et $\partial\Omega$ est de classe C^2 . Dans ce travail, on suppose $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω cylindrique, plus précisément : $\Omega := (a, b) \times \omega$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine de classe C^4 . On montre alors l'existence d'une unique solution $u \in W^{4,p}(\Omega)$ de (1) sous diverses conditions aux limites. Pour cela, on s'inspire des travaux de [3] basés sur la théorie des semi-groupes analytiques et des sommes d'opérateurs [1]. L'espace étant cylindrique, on procède à une séparation des variables en notant

$$u(x)(y) := u(x, y) \quad \text{et} \quad Au(x) := \Delta_y u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) \in D(A),$$

pour p.p. $(x, y) \in \Omega$. Ici $D(A)$ est le domaine de A qui dépend des conditions aux bords considérées. L'équation (1) s'écrit alors en une équation différentielle opérationnelle du quatrième ordre :

$$u^{(4)}(x) + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) = f(x),$$

où $x \in (a, b)$ et $k := k_1/k_2$. On se place alors dans l'espace de Banach $X = L^p(\omega)$ dans lequel on montre l'existence et l'unicité d'une solution $u \in W^{4,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(A^2))$ avec $u'' \in L^p(a, b; D(A))$. Plus précisément, pour chaque type de condition aux limites, on donne les conditions nécessaires et suffisantes de compatibilité sur les données pour avoir l'existence, l'unicité et la régularité optimale d'une solution dans chacun des cas. Pour cela, on fera appel à des résultats d'interpolation.

Références

- [1] G. DORE & A. VENNI, "On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators", *Math. Z.*, 196, 1987, pp. 189-201.
- [2] D.S. COHEN & J.D. MURRAY, "A Generalized Diffusion Model for Growth and Dispersal in Population", *Journal of Mathematical Biology*, 12, Springer-Verlag, 1981, pp. 237-249.
- [3] A. FAVINI, R. LABBAS, S. MAINGOT, H. TANABE & A. YAGI, "A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications", *Funkcialaj Ekvacioj*, 51, 2008, pp. 165187.
- [4] F.L. OCHOA, "A Generalized Reaction-Diffusion Model for spatial Structures Formed by Motile cells", *BioSystems*, 17, 1984, pp. 35-50.
- [5] R. LABBAS, S. MAINGOT, D. MANCEAU & A. THOREL, "On a generalized diffusion model in population dynamics", Article soumis.

Alexandre THOREL, LMAH, Université du Havre, 25 Rue Philippe Lebon
alexandre.thorel@orange.fr

Rabah LABBAS, LMAH, Université du Havre, 25 Rue Philippe Lebon
rabah.labbas@univ-lehavre.fr

Stéphane MAINGOT, LMAH, Université du Havre, 25 Rue Philippe Lebon
stephane.maingot@univ-lehavre.fr

David MANCEAU, LMAH, Université du Havre, 25 Rue Philippe Lebon
david.manceau@univ-lehavre.fr