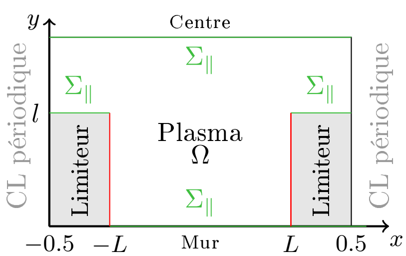
# Méthodes préservant l'asymptotique pour un modèle du potentiel électrique dans le plasma de bord d'un tokamak

**Thomas AUPHAN**, Aix-Marseille Université, I2M, UMR 7373

**Philippe ANGOT**, Aix-Marseille Université, I2M, UMR 7373

**Olivier GUÈS**, Aix-Marseille Université, I2M, UMR 7373

La maîtrise des interactions plasma-paroi est une des difficultés majeures pour la réalisation de la fusion nucléaire par confinement magnétique. On s'intéresse ici à la modélisation du potentiel électrique dans le plasma de bord d'un tokamak de type TORE SUPRA.




$$\left\{\begin{array}{ll} -\partial_t\partial_y^2\phi_\eta - \dfrac{1}{\eta}\partial_x^2\phi_\eta + \nu\partial_y^4\phi_\eta = S & \text{dans } ]0,T[\times\Omega \\ \partial_y\phi_{\eta|t=0} = \partial_y\phi_{ini} & \text{dans } \Omega \\ \partial_y\phi_{\eta|\Sigma_\parallel} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_y^3\phi_{|\Sigma_\parallel} = 0 & \text{sur } ]0,T[\times\Sigma_\parallel \\ \partial_x\phi_{\eta|x=-L} = \eta\left(1 - e^{\Lambda-\phi_{\eta|x=-L}}\right) & \text{sur } ]0,T[\times]0,l[\times\{-L\} \\ \partial_x\phi_{\eta|x=L} = \eta\left(1 - e^{\Lambda-\phi_{\eta|x=L}}\right) & \text{sur } ]0,T[\times]0,l[\times\{L\}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Le domaine 2D considéré est présenté dans le schéma ci-dessus. L'axe $x$ correspond à une abscisse curviligne le long d'une ligne de champ magnétique. L'axe $y$ correspond à la direction radiale. Le modèle adimensionné étudié est alors décrit par le système (1). Le coefficient $\nu$ correspond à la viscosité ionique perpendiculaire et $\Lambda$ désigne le potentiel de référence au niveau du limiteur. L'équation $\partial_y\phi_{\eta|t=0} = \partial_y\phi_{ini}$ est la condition initiale du problème (1). Le paramètre $\eta$ est la résistivité du plasma dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétique. A $\eta$ fixé, et sous certaines hypothèses sur $\phi_{ini}$ et $S$ (régularité, $S$ suffisamment petit...), on sait que le problème (1) admet une unique solution faible [1]. En pratique, $\eta$ est très faible (de l'ordre de $10^{-6}$). Cela induit une forte anisotropie dans le problème d'évolution : quand $\eta$ tend vers 0, le problème (1) devient sous-déterminé.

Pour faciliter la résolution numérique du problème (1) avec $\eta \ll 1$, nous utilisons une méthode de type *Asymptotic Preserving* : la décomposition micro-macro introduite par Degond *et al.* [2] pour un problème elliptique linéaire anisotrope. L'idée est de faire une décomposition de la solution $\phi_\eta$ de (1) sous la forme $\phi_\eta = p_\eta + \eta q_\eta$ avec $\partial_x p_\eta = 0$ et $q_{\eta|x=-L} = 0$. Ensuite, on ne calcule que le couple $(\phi_\eta, q_\eta)$. On montre alors que, sous certaines hypothèses sur $\phi_{ini}, S, \Lambda$ et $\nu$, le problème faible associé à $(\phi_\eta, q_\eta)$ est bien posé, y compris quand $\eta$ tend vers 0. De plus, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\phi_\eta - \phi_0\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq c(\Omega, T, \phi_0, S, \Lambda)\sqrt{\eta},$$

où $c(\Omega, T, \phi_0, S, \Lambda)$ ne dépend que de $\Omega, T, \phi_0, S, \Lambda$.

Des tests numériques sur le problème $(\phi_\eta, q_\eta)$ avec un schéma de type différences finies ont permis de montrer que la matrice utilisée pour la résolution de chaque étape en temps a un conditionnement borné quand $\eta$ tend vers 0.

## Références

[1] C. Negulescu, A. Nouri, Ph. Ghendrih, Y. Sarazin, *Existence and uniqueness of the electric potential profile in the edge of tokamak plasmas when constrained by the plasma-wall boundary physics*, Kinetic and Related Models, vol. 1 no. 4, pp. 619 - 639, 2008.

[2] P. Degond, A. Lozinski, J. Narski, C. Negulescu, C., *An asymptotic-preserving method for highly anisotropic elliptic equations based on a MicroMacro decomposition*, Journal of Computational Physics, vol. 231 no. 7, pp. 2724 - 2740, 2012.

**Thomas AUPHAN**, Institut de Mathématiques de Marseille, CMI, 39, rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13 FRANCE
thomas.auphan@univ-amu.fr