Discrétisation spectrale des équations de Darcy instationnaires non linéaires

Sarra MAAROUF, UPMC

Christine BERNARDI, UPMC

Le système des équations de Darcy instationnaires modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux à perméabilité dépendant de la pression, de sorte que le modèle est non linéaire. Sous certaines hypothèses portant sur la nature de l'écoulement et les interactions entre le fluide et le solide rigide poreux [1], ce modèle se présente comme:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \alpha(p)\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \\ p = p_b & \text{sur} \quad \Gamma_p\times]0,T[, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = g & \text{sur} \quad \Gamma_u\times]0,T[, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Les inconnues sont la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression p, qui sont des fonctions de la variable spatiale $\boldsymbol{x}$ dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, et de la variable de temps t dans $]0,T[$, (T est un nombre réel positif). $\boldsymbol{f}$ représente la densité de forces, p_b est la pression sur une partie du bord Γ_p et g est la vitesse normale sur l'autre partie du bord Γ_u. La vitesse initiale $\boldsymbol{u}_0$ est à divergence nulle.
Nous écrivons une discrétisation de cette équation par schéma d'Euler implicite en temps et méthodes spectrales en espace. On a recours au théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [2] pour montrer l'estimation d'erreur optimale entre la solution continue et la solution discrète. Quelques expériences numériques confirment l'intérêt de cette approche.

Références

[1] K.R. Rajagopale, *On a hierarchy of approximate models for flows of incompressible fluids through porous solid*, Math. Models Methods Appl. Sci. 17, 2007.

[2] F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A. Raviart , *Finite dimensional approximation of nonlinear problems, Part I: Branches of nonsingular solutions*, Numer. Math. 36, 1980, 125.

Sarra MAAROUF, 4 place Jussieu 75005 Paris, France
maarouf@ann.jussieu.fr