Approche Shermann-Morrison-Woodbury pour la résolution rapide des termes de pénalisation. Application à l'écoulements du mucus pulmonaire

Robin CHATELIN, Institut de Mathématiques de Toulouse

Philippe PONCET, Université de Pau et des Pays de l'Adour

La méthode de pénalisation [1] a été beaucoup utilisée en mécanique des fluides numérique pour modéliser l'interaction entre un fluide et des obstacles immergés. Elle consiste à étendre l'équation de conservation de quantité de mouvement du fluide dans le domaine solide, en ajoutant un terme de pénalisation.
La présentation se focalise sur le problème de Stokes quasi-statique (1), la généralisation aux équations de Navier-Stokes et aux cas à viscosité variable sera également abordée.
Soit Ω le domaine de calcul complet et $\mathcal{B}$ le domaine solide (qui dépend du temps si les obstacles sont mobiles). Le problème de Stokes pénalisé pour un fluide très visqueux incompressible s'écrit:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \chi\varepsilon^{-1}(u-\overline{u}) - \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \text{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \mathcal{B} \end{cases} \tag{1}$$

avec u le champs de vitesse du fluide, p la pression, f les forces externes, χ la fonction caractéristique du domaine solide, $\overline{u}$ la vitesse des obstacles et $\varepsilon << 1$ le paramètre de pénalisation.
Après séparation de la résolution de la vitesse et la pression [2], la première équation de (1) est du type:

$$-\mu\Delta u + cu = g \tag{2}$$

où c est à support dans $\mathcal{B}$.
Le principe de la méthode consiste à voir le problème (2) comme un problème de Poisson perturbé dans $\mathcal{B}$ et non comme un problème de Helmholtz à coefficients variables. En utilisant la formule de Shermann-Morrison-Woodbury [4], cela conduit à la résolution d'un système linéaire, avec la méthode itérative GMRES, qui est posé seulement sur les points de discrétisation pénalisés. La taille de ce système linéaire est donc bien inférieure à la taille du problème complet. De plus, il n'est pas nécessaire d'assembler cette matrice: chaque enrichissement de la base de Krylov requiert la résolution d'un problème de Poisson avec un solveur rapide (FFT) [5]. En outre ce système est très bien conditionné, ce qui permet d'utiliser une base de Krylov de petite dimension, qui croît lentement lorsque la résolution spatiale augmente. Cette méthode numérique [3] est donc bien adaptée pour la résolution 3D de problèmes de mécanique des fluides de grande dimension.
Plusieurs simulations numériques illustreront l'exposé: on s'intéresse particulièrement à l'écoulement du mucus pulmonaire autour des cils vibratiles tapissant les parois bronchiques. Le bon fonctionnement de ces cils assure le renouvellement permanent du film mucus, ce qui fait défaut dans le cas de pathologies pulmonaires comme la mucoviscidose, les bronchites chroniques ou l'asthme.

Références

[1] Angot, Bruneau and Fabrie, *A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows*, Numerische Mathematik, 81, 1999.

[2] Chatelin and Poncet, *A hybrid Grid-Particle method for moving bodies in 3D Stokes flow with variable viscosity*, SIAM Journal on Scientific Computing, 35, 2013.

[3] Chatelin and Poncet, *Hybrid Grid-Particle methods and Penalization: a Sherman-Morrison-Woodbury approach to compute 3D viscous flows using FFT*, Soumis.

[4] Hager, *Updating the inverse of a matrix*, SIAM Rev., 31, 1989.

[5] Swarztrauber and Sweet, *Efficient FORTRAN subprograms for the solution of elliptic partial differential equations (abstract)*, SIGNUM Newsl, 10, 1975.

Robin CHATELIN, Institut de Mathématiques de Toulouse, équipe MIP, INSA Département GMM, 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse CEDEX 04
robin.chatelin@math.univ-toulouse.fr   math.univ-toulouse.fr/~rchateli/