

Systeme de lois de conservation : Le cas de deux flux de piétons opposés.

Matthias MIMAULT, INRIA - Sophia-Antipolis

Mots-clés : Flux à deux phases, lois de conservation, modélisation de trafic piétonnier, problème de Riemann, type mixte elliptique-hyperbolique, volumes finis.

La gestion des mouvements de foule est au cœur des défis économiques et sociaux. Les embouteillages aux heures de pointe sont des phénomènes pénibles pour les travailleurs comme pour les touristes. Être capable de prévoir et contrôler le comportement d'une foule quand un seuil critique est franchi relève de la nécessité.

Les modèles macroscopiques de trafic sont conçus en supposant que les déplacements sont régis par la densité. Ainsi dans le travail de [5] et [3], le flux de l'équation de conservation scalaire est établi d'après une relation vitesse-densité $f(u) = u.v(u)$

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases}$$

avec comme donnée initiale de Riemann

$$u_0 = \begin{cases} u_L, & \text{pour } x < 0, \\ u_R, & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Dans le cas classique, la solution est la combinaison de deux ondes particulières. L'une marque un changement brusque dans la densité et se nomme *choc*, quand l'autre marque un changement graduel et se nomme *détente* [1].

On se focalisera sur l'évolution de diverses répartitions des deux groupes pour déterminer les densités susceptibles de dégénérer en un arrêt net de la circulation. Cela forme le système suivant sur les densités u et v

$$\begin{cases} u_t + f(u, v)_x = 0, \\ v_t - f(v, u)_x = 0, \end{cases}$$

L'étude d'un tel modèle revient à celle d'un continuum à deux phases. Elle révèle que les valeurs propres du système deviennent complexes pour certaines valeurs de densités. Le comportement du système sort alors du cadre classique. Un nouveau type de choc de traversement (Σ -choc) est admissible et une solution peut combiner plus d'ondes que le cas strictement hyperbolique, voir [2] et [4]. L'étude attentive des courbes de choc donne l'évolution de chaque solution et permet sa construction malgré les limitations des schémas numériques hyperboliques.

Références

- [1] A. BRESSAN, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 2000.
- [2] H. HOLDEN, L. HOLDEN AND N. RISEBRO, *Some qualitative properties of 2×2 systems of conservation laws of mixed type.*, Nonlinear evolution equations that change type, volume 27 of IMA Vol. Math. Appl., 1990.
- [3] R. L. HUGHES, *A continuum theory for the flow of pedestrians*, Transp. Res. B 36, 507-535, 2002.
- [4] E. ISAACSON, D. MARCHESIN, B. PLOHR AND B. TEMPLE, *The Riemann problem near an hyperbolic singularity : the classification of solutions of quadratic Riemann problems.*, SIAM J. Appl. Math., 48(5):1009-1032, 1988.
- [5] M. J. LIDTHILL AND G. B. WHITHAM, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads.*, Proc. Roy. Soc. A229, 317-345, 1955.

Matthias MIMAULT, INRIA - Sophia-Antipolis, OPALE-Project Team, 2004 Route des Lucioles, BP 93 - 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France
Téléphone : +33(0) 4 97 15 53 11
matthias.mimault@inria.fr