Un schéma VF-EF mixte pour la détection des patterns pour un modèle de chimiotaxie

Moustafa IBRAHIM, École Centrale de Nantes

La chimiotaxie est le mouvement dirigé par les cellules en réponse aux gradients chimiques appelés chiomiattractants. L'analyse mathématique des modèles de chimiotaxie montre une plénitude de patterns spatiaux tels que les modèles de chimiotaxie appliquées aux motifs de pelage d'animaux [1] qui conduisent à des agrégations d'un type de cellules pigmentaires dans une rayure spatiale. Ainsi que d'autres modèles appliqués sur les agrégations des patterns dans une maladie épidémique [2], croissance tumorale [6], et plusieurs autres exemples.
La formation de patterns est le processus qui, en changeant un paramètre de bifurcation, les états stationnaires homogènes d'un système de réaction-diffusion perdent leur stabilité pour des petites perturbations spatiales, et des solutions stables non homogènes se produisent.
La formation de patterns dépend de deux points principaux, le premier est d'appliquer l'idée séminale de Turing [3] pour un système de réaction-diffusion et par conséquent de déterminer les paramètres de bifurcation pour la génération des patterns stationnaires et non homogènes en espaces (aussi appelé Patterns de Turing). Le deuxième point est d'appliquer un schéma robuste pour détecter la génération des patterns spatio-temporels.
Dans cet exposé, on s'intéresse à l'étude de la formation de patterns pour un système parabolique modélisant l'effet de remplissage de volume pour un modèle de chimiotaxie. Ce système est gouverné par une équation parabolique (réaction-diffusion-convection) modélisant l'interaction entre les inconnus du système: la densité cellulaire et la concentration chimiotactique, couplée par une équation parabolique de diffusion du chimioattractant. Pour aboutir à une telle étude, on applique le principe de Turing et l'argument standard utilisé par Murray [4, 5] pour satisfaire les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système génère de patterns spatiaux, ainsi on met en place un développement asymptotique formel pour linéariser le système. Ensuite, on introduit un schéma numérique VF-EF mixte pour la détection des patterns spatio-temporels. Le terme de diffusion, qui implique généralement des tenseurs anisotropes, est discrétisé en utilisant la méthode des éléments finis conforme sur un maillage primaire. Par contre, le terme de convection est discrétisé au moyen d'un schéma amont volumes finis sur un maillage dual (maillage barycentrique). Ce schéma garantit la validité du principe de maximum sous l'hypothèse de la positivité des coefficients de transmissibilité. La convergence de ce schéma est basé sur l'utilisation du théorème de Kolmogorov. Enfin, une simulation numérique en dimension deux est effectuée pour montrer l'efficacité de ce dernier schéma à détecter la génération des patterns spatio-temporels pour le système proposé.

Références

[1] Murray, James D, *How the leopard gets its spots*, Scientific American, 258 80–87, 1988.

[2] Bendahmane, Mostafa and Saad, Mazen, *Mathematical analysis and pattern formation for a partial immune system modeling the spread of an epidemic disease*, Acta applicandae mathematicae, 115 17–42, 2011.

[3] Turing, Alan Mathison, *The chemical basis of morphogenesis*, Bulletin of mathematical biology, 52 153–197, 1990.

[4] Murray, James D, *Mathematical biology: I. An introduction*, Springer, 2002.

[5] Murray, James D, *Mathematical biology II: spatial models and biomedical applications*, Springer, 2003.

[6] Chaplain, Mark AJ and Ganesh, Mahadevan and Graham, Ivan G, *Spatio-temporal pattern formation on spherical surfaces: numerical simulation and application to solid tumour growth*, Journal of mathematical biology, 42 387–423, 2001.

Moustafa IBRAHIM, École Centrale de Nantes. Département Informatique et Mathématiques. Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629 CNRS). 1, rue de la noë, 44321 Nantes.
moustafa.ibrahim@ec-nantes.fr