Modélisation du mouvement de structures fines dans un fluide visqueux.

Loïc LACOUTURE, Université Paris-Sud

Astrid DECOENE, Université Paris-Sud

Sébastien MARTIN, Université Paris Descartes

Bertrand MAURY, Université Paris-Sud

Dans le but de modéliser le transport mucociliaire ou la nage de micro-organismes, et plus généralement le mouvement de structures fines dans un fluide visqueux, nous avons été amenés à étudier le problème de Stokes avec un second membre singulier : une masse de Dirac. En travaillant aussi sur un problème plus simple, le problème de Laplace, nous avons considéré les deux approches suivantes.
La solution n'est pas régulière, et donc les résultats classiques de convergence des méthodes type éléments finis ne sont plus valides. Néanmois, le problème discret a bien un sens. Scott a montré dans [1] pour le problème de Laplace, qu' il y avait convergence en norme L^2 à l'ordre 1 en dimension 2 et à l'ordre 1/2 en dimension 3, pour les éléments finis P_1 ou d'ordre supérieur. Nous avons observé numériquemet, puis démontré, à l'aide de théorèmes fins d'analyse numérique type Nitsche et Schatz [2], un résultat de convergence à l'ordre usuel sur un sous-domaine excluant un voisinage de la singularité. L'intérêt de ce résultat est qu'il nous assure une bonne convergence de la méthode directe, si bien sûr on ne regarde que ce qu'il se passe loin de la singularité.
La seconde approche, moins directe, consiste à extraire la singularité, qui est connue pour les problèmes de Laplace et de Stokes, et à résoudre numériquement un problème annexe, lui régulier, dont nous savons qu'il convergera à l'ordre optimal. Nous obtenons ainsi une méthode numérique efficace pour calculer une solution approchée. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle permet de considérer un grand nombre de masses de Dirac. Si la construction du second membre est alors plus coûteuse, on ne résout qu'un seul problème éléments finis, et sa taille est indépendante du nombre de masses de Dirac.
L'approche choisie pour modéliser un cil bronchique ou un flagelle bactérien, et pour prendre en compte la finesse de sa structure, est de le voir comme une distribution linéique de force. Cette distribution linéique sera elle-même approchée par une série de masses de Dirac alignées le long de la courbe dessinant le cil. La méthode précédente permet d'envisager d'importants calculs en 3d sur un grand nombre de cils. Une paramétrisation d'un cil bronchique, et par extension, de toute une forêt de cils, a été établie par Fulford et Blake dans [3]. Reste alors à définir l'intensité de la répartition de force tout au long du cil, s'appuyant sur un résultat de Cox [4].

Références

[1] R. Scott, *Finite Element Convergence For Singular Data*, Numerical Mathematics, **21**, pp. 317-327 (1973).

[2] J. A. Nitsche, A. H. Schatz, *Interior Estimates for Ritz-Galerkin Methods*, Mathematics of Computation, Vol. 28, No. 128, P. 937-958 (1974).

[3] G. R. Fulford, J. R. Blake, *Muco-ciliary Transport in the Lung*, Journal of Theorical Biology, **121**, pp. 381-402 (1986).

[4] R. G. Cox, *The Motion of Long Slender Bodies in a Viscous Fluid. Part 1. General Theory*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 44, Part 4, pp. 791-810 (1970).

Loïc LACOUTURE, Université Paris-Sud, 15 rue George Clémenceau, Bât. 425, Bur. 256, 91400 Orsay
`loic.lacouture@math.u-psud.fr`
Astrid DECOENE, Université Paris-Sud, 15 rue George Clémenceau, Bât. 425, Bur. 150, 91400 Orsay
`astrid.decoene@math.u-psud.fr`
Sébastien MARTIN, Université Paris Descartes, 45 rue des Saints-Pères, Bur. 752, 75270 Paris cedex 06
`sebastien.martin@parisdescartes.fr`
Bertrand MAURY, Université Paris-Sud, 15 rue George Clémenceau, Bât. 425, Bur. 130, 91400 Orsay
`bertrand.maury@math.u-psud.fr`