Algorithmes de type Schwarz optimisés dans le cadre des schémas DDFV

Martin GANDER, University of Geneva

Laurence HALPERN, Universit PARIS 13

Florence HUBERT, Aix-Marseille Université

Stella KRELL, Université de Nice

Nous nous intéressons, dans cette présentation, aux méthodes de type Schwarz sans recouvrement pour le problème de diffusion anisotrope suivant

$$\mathcal{L}(u) := -\text{div}(A\nabla u) + \eta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \tag{1}$$

$$\text{avec } (x,y) \in \Omega \mapsto A(x,y) = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Au cours des cinq dernières années, les méthodes de Schwarz classiques et optimisées ont été développées pour des problèmes elliptiques anisotropes discrétisées à l'aide des méthodes DDFV (Discrete Duality Finite Volume). Comme dans le cas des méthodes de Galerkin discontinues, la discrétisation appropriée des conditions de transmission à l'aide de DDFV n'est a priori pas évidente. De plus, la vitesse de convergence de l'algorithme dépend de la valeur du paramètre définissant la condition de transmission. La première version DDFV de l'algorithme de Schwarz, développée pour des conditions de transmission de type Fourier dans [1], ne respectait pas le comportement du paramètre optimal observé pour le problème continu et dont la valeur théorique a été donné dans [2]. C'est pourquoi, une seconde version a été proposée dans [3], afin de respecter ce comportement. Dans cette présentation, nous souhaitons étendre cette seconde version aux conditions de transmission d'ordre 2 de type Ventcell qui ont été initialement proposées dans [5] ($A = Id$) et [4] ($A = \lambda(x)Id$). Pour le problème (1), cet algorithme itératif s'écrit : pour $j = 1, 2$, étant donné u_i^l ($i \neq j$, $l \in \mathbb{N}^*$), il faut trouver u_j^{l+1} tel que

$$\mathcal{L}(u_j^{l+1}) = f \ \text{ dans } \Omega_j, \quad u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega, \tag{3}$$

$$A\nabla u_j^{l+1} \cdot \mathbf{n}_{ji} + \Lambda u_j^{l+1} = -A\nabla u_i^l \mathbf{n}_{ij} + \Lambda u_i^l \qquad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, \tag{4}$$

avec $\Lambda u = pu - q\partial_y(A_{yy}\partial_y u)$ (cette écriture suppose que $\Gamma = \{x = 0\}$) et $\mathbf{n}_{ji}$ est la normale unitaire orientée de Ω_j à Ω_i.

Nous proposons, dans cette présentation, une version discrète de (3)-(4), nous montrons également la convergence de cet algorithme. Nous terminerons par des expériences numériques, qui illustrerons le gain des conditions de type Ventcell par rapport à celles de type Fourier.

Références

[1] F. Boyer, F. Hubert, and S. Krell, *Non-overlapping schwarz algorithm for solving 2d m-ddfv schemes*, IMA Jour. Num. Anal., 30, 2009.

[2] M. J., Gander, *Optimized Schwarz method*, SIAM J. on Numer. Anal. 44(2), 699–731, 2006.

[3] M. J. Gander, F. Hubert, and S. Krell, *Optimized Schwarz algorithms in the framework of DDFV schemes*, In Proceedings of the DD21, Rennes, 2012.

[4] L. Halpern and F. Hubert, *A finite volume Ventcell-Schwarz algorithm for advection-diffusion equations*, soumis, 2014.

[5] C. Japhet. PhD thesis, Université Paris 13, 1998. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00558701/fr/.

Martin GANDER, University of Geneva, 2-4 rue du Lièvre CP 64 1211 Genève Switzerland
martin.gander@unige.ch
Laurence HALPERN, Universit PARIS 13, LAGA,93430 Villetaneuse, FRANCE
halpern@math.univ-paris13.fr
Florence HUBERT, Aix-Marseille Université, LATP, 39 rue F. Joliot Curie 13 453 Marseille cedex 13, FRANCE
florence.hubert@univ-amu.fr
Stella KRELL, Université de Nice, LJAD, Parc Valrose 28 avenue Valrose 06108 Nice Cedex 2 FRANCE
krell@unice.fr