Sur le schéma de Godunov à bas nombre de Mach pour l'équation des ondes avec taux de vide

Jonathan Jung, LJLL, Paris, France.

Stéphane Dellacherie, CEA, Gif-sur-Yvette, France

Pascal Omnes, CEA, Gif-sur-Yvette, France

Pierre-Arnaud Raviart, LJLL, Paris, France

Il est maintenant bien connu que les schémas de type Godunov appliqués àu système d'Euler compressible se comportent mal à bas nombre de Mach. Aussi, des études ont été réalisées pour rendre précis ce type de schéma à tout nombre de Mach [1], études basées sur l'analyse du problème dans le cas de l'équation des ondes linéaire. Cependant, le travail réalisé dans [1] ne prend pas en compte le taux de vide (ou fraction volumique de vapeur) qui est une grandeur essentielle dans le cas d'un cœur de réacteur nucléaire, l'écoulement pouvant être diphasique dans certains scénarii accidentels.

Un modèle simplifié pour étudier ce type d'écoulement est le modèle Euler barotrope avec taux de vide qui, en grandeurs adimensionnées, est donné par

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha\rho) + \nabla \cdot (\alpha\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\alpha\rho\mathbf{u}) + \nabla(\alpha\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{\alpha}{M^2}\nabla p = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où ρ, u et $p(\rho)$ sont respectivement la densité, la vitesse et la pression du fluide diphasique. M est le nombre de Mach supposé petit et $\alpha(t,x)$ est le taux de vide, $t \geq 0$ et $x \in \Omega$ étant les variables de temps et d'espace. Afin de simplifier le problème, on ferme le système (1) en supposant ici que $\alpha(t,x)$ est une fonction connue qui prend ses valeurs dans $[\alpha_{\min}, 1]$, $\alpha_{\min} > 0$ étant une constante indépendante de M.

Pour mieux comprendre le comportement à bas nombre de Mach des schémas de type Godunov appliqués à (1) et proposer une correction rendant le schéma précis à tout nombre de Mach, on se propose ici d'étudier le problème dans le cas d'un système linéaire obtenu à partir d'une linéarisation de (1) autour de $(\rho_\star = cst, \mathbf{u}_\star = 0)$ et lorsque Ω est périodique. Pour cela, notons $\frac{a_\star}{M}$ la vitesse du son de référence et posons

$$\rho(t,x) := \rho_\star \left(1 + \frac{M}{a_\star} r(t,x)\right), \tag{2}$$

où formellement $\frac{M}{a_\star} r \ll 1$. En injectant (2) dans (1), nous obtenons le système

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha r) + \frac{a_\star}{M}\nabla \cdot (\alpha\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t\mathbf{u} + \frac{a_\star}{M}\nabla r = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Le système (3) est l'équation des ondes avec taux de vide qui a été étudiée en 1D dans [2]. De la même manière que dans le cas $\alpha = cst$ [3], nous montrons qu'un schéma de Godunov appliqué au système (3) se comporte bien à faible nombre de Mach sur maillage triangulaire mais que celui-ci doit être modifié pour avoir un bon comportement sur maillage cartésien. Nous proposons alors une correction au schéma de Godunov appliqué à (3) puis les propriétés que ce schéma satisfait. Enfin, nous illustrons ces résultats théoriques par quelques simulations numériques.

Références

[1] S. Dellacherie, P. Omnes et P.-A. Raviart, *Construction of Godunov type schemes accurate at any Mach number* Soumis. Preprint disponible à l'adresse http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/77/66/29/PDF/article bas mach dellacherie omnes et par.pdf.

[2] S. Dellacherie et P. Omnes, *On the Godunov Scheme Applied to the Variable Cross-Section Linear Equation*, Finite volumes for complex applications VI (FVCA6). Problems and Perspectives, Springer Proc. Math., 4:313-321, 2011.

[3] S. Dellacherie, P. Omnes et F. Rieper, *The influence of cell geometry on the Godunov scheme applied to the linear wave equation*, J. Comp. Phy., 229, 5315-5338, 2010.

Jonathan Jung, Laboratoire Jacques Louis Lions, 4, place Jussieu, 75252 Paris, cedex 05, France,
jonathan.jung@ljll.math.upmc.fr