Transport Optimal Anisotrope

Romain HUG, Laboratoire Jean Kuntzmann

Considérons deux densités (ρ_0, ρ_T) positives sur un espace Ω, bornées et de même masse.

$$\int_\Omega \rho_0(x)dx = \int_\Omega \rho_T(x)dx$$

Le problème de Monge-Kantorovich revient à déterminer un plan de transport (optimal) M entre ρ_0 et ρ_T minimisant

$$\int_\Omega |d(x, M(x))|^2 \rho_0(x)dx.$$

où $d(x, y)$ représente une distance sur Ω. Pour le cas isotrope, on utilise habituellement $d(x, y) = |x - y|$. La distance $\mathcal{W}_2(\rho_0, \rho_T)$ définie par :

$$\mathcal{W}_2(\rho_0, \rho_T)^2 = \underset{M\sharp\rho_0=\rho_T}{inf} \int_\Omega |d(x, M(x))|^2 \rho_0(x)dx,$$

est appelée *distance de Wasserstein*.

La résolution de ce problème, dans la formulation introduite par Jean-David Benamou et Yann Brenier [1] [2], se ramène à la recherche d'un déplacement continu de la masse, qui minimise une certaine énergie de transport $T\int_\Omega\int_0^T \rho(t, x)|v(t, x)|^2 dxdt$, ($\rho$ étant la densité de masse et v la vitesse eulérienne de déplacement). La distance de Wasserstein précédemment définie correspond alors à

$$\mathcal{W}_2(\rho_0, \rho_T)^2 = \underset{\substack{\partial_t\rho+\mathrm{div}_x(\rho v)=0 \\ \rho(0,.)=\rho_0,\ \rho(T,.)=\rho_T}}{inf} T\int_\Omega\int_0^T \rho(t, x)|v(t, x)|^2 dxdt.$$

Nous proposons tout d'abord d'utiliser cette formulation, afin de définir simplement un problème de transport optimal en milieu anisotrope (obstacles, polarisation, champs de force, etc...) en pénalisant cette énergie de déplacement : on cherche un transport continu de masse (ρ, v) qui minimise une énergie du type

$$T\int_\Omega\int_0^T \rho(t, x)\, v(t, x)^t A(t, x) v(t, x) dxdt$$

avec $A(t, x)$ symétrique définie positive.

En second lieu, nous montrerons en quoi la formulation sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes permet de résoudre ce problème par des méthodes de type Lagrangien augmenté [3], sous réserve de l'existence de solutions théoriques dans des espaces appropriés à l'utilisation de tels algorithmes (dans notre cas nous cherchons des solutions L^2) [4].

La distance de Wasserstein (en tant que distance basée sur le déplacement) en milieu anisotrope nous permet finalement d'aborder d'un point de vue nouveau un certain nombre de problèmes, tels que l'analyse d'images, d'animations, voire même le morphing de voix.

Références

[1] J.D.Benamou-Y.Brenier, *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math. (2000) 84: 375393

[2] K.Guittet, *On the time-continuous mass transport problem and its approximation by augmented lagrangian techniques*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 41, No. 1 (2004), pp. 382-399

[3] M.Fortin-R.Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the numerical solution of boundary-value problems*, Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland (1983)

[4] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, Giuseppe Savare , *Gradient Flows: In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures* Lectures in Mathematics. ETH Zurich (2005)

Romain HUG, Laboratoire Jean Kuntzmann
`romain.hug@imag.fr`