Un lien entre le transport optimal 1D et l'équation des surfaces minimales

Morgane HENRY, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes

Emmanuel MAITRE, Valérie PERRIER, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes

Le transport optimal est un domaine en pleine extension [1], possédant de nombreuses applications en économie, apprentissage automatique, équations aux dérivées partielles non linéaires ou encore pour l'interpolation d'images. Cependant la résolution numérique de ce transport soulève des difficultés et le développement d'algorithmes efficaces est un problème toujours ouvert.

Dans ce travail nous nous intéressons plus particulièrement à la formulation de Benamou et Brenier [2], qui ont placé le problème dans un contexte de mécanique des milieux continus en ajoutant une dimension temporelle. Il s'agit de minimiser la fonctionnelle

$$\int_0^T \int_{[0,1]^d} \frac{|m|^2}{\rho} dtdx$$

sur les couples (ρ, m) appartenant à l'espace des contraintes

$$C := \{(\rho, m);\ \partial_t \rho + \operatorname{div}_x m = 0,\ m(.,0) = m(.,1) = 0,\ \rho(0,.) = \rho_0,\ \rho(T,.) = \rho_T\}.$$

L'algorithme utilisé par Benamou et Brenier est un lagrangien augmenté et donc une descente sur la fonctionnelle est opérée en sortant de l'espace des contraintes puis en reprojetant sur cet espace.

Dans cet exposé nous détaillons un algorithme travaillant directement dans l'espace des contraintes C. En effet nous montrons que la fonctionnelle considérée est strictement convexe sur C alors qu'elle ne l'est pas à l'extérieur. Pour travailler dans C, nous utilisons la représentation des champs de vecteurs à divergence nulle par leur fonction de courant [3] :

$$(\rho, m) = \nabla \times \phi.$$

Nous montrons ensuite que dans le cas unidimensionel en espace nous nous ramenons à la résolution d'une équation de type courbure minimale sur chaque ligne du potentiel munie des conditions de Dirichlet appropriées :

$$\operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} = 0.$$

Cette équation peut être résolue numériquement par la méthode des éléments finis. Nous présentons quelques simulations utilisant FreeFEM++ [4].

Références

[1] Villani, C., *Topics in optimal transportation*, American Mathematical Soc., 2003.

[2] Benamou, J.D. and Brenier, Y., *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math. **84** (2000), pp. 375-393.

[3] Girault, V. and Raviart, P.A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms* , Springer, 1986.

[4] http://www.freefem.org

Morgane HENRY, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes, UMR 5524 CNRS, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France
`morgane.henry@imag.fr`
Emmanuel MAITRE, Valérie PERRIER, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes, UMR 5524 CNRS, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France
`Emmanuel.Maitre@imag.fr, Valerie.Perrier@imag.fr`