Stabilité des schémas de Boltzmann à vitesses relatives : importance du choix des moments

Tony FEVRIER, Université Paris-Sud Orsay

Benjamin GRAILLE, Université Paris-Sud Orsay

Francois DUBOIS, CNAM Paris, Université Paris-Sud Orsay

La mise en œuvre des schémas de Boltzmann sur réseau est d'une grande simplicité et leur flexibilité permet de simuler un grand nombre d'équations aux dérivées partielles. Ils sont d'ailleurs utilisés dans les milieux industriels et font l'objet depuis peu de recherches de nature mathématique. Nous nous proposons ici de présenter un nouveau type de schéma de Boltzmann sur réseau inspiré des travaux de M. Geier [2] et permettant de résoudre certaines équations macroscopiques de type fluide (acoustique, Navier-Stokes, *etc.*).

Etant fixés Δx un pas d'espace et Δt un pas de temps, on se donne un réseau régulier de l'espace à deux dimensions $\mathcal{L} = \Delta x(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ et un ensemble fini de vitesses $\{v_j\}_{0\leq j\leq 8}$, avec $v_j \in (\Delta x/\Delta t)\mathcal{V}$ où $\mathcal{V} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)\}$ pour le schéma dit D2Q9 ; la généralisation à trois dimensions spatiales ou à des vitesses différentes est immédiate mais n'est pas présentée par souci de simplicité. Une caractéristique de cette approche est que si $x_k \in \mathcal{L}$ alors, quel que soit $j \in \{0,\ldots,8\}$, $x_k + v_j\Delta t \in \mathcal{L}$. Nous introduisons alors les fonctions de distribution $f_j(x_k,t^n)$, $0 \leq j \leq 8$, qui représentent le nombre de macro-particules au point x_k à l'instant $t^n = n\Delta t$ de vitesse v_j. Les quantités macroscopiques qui nous intéressent sont alors des moments discrets des f_j. Par exemple pour la masse et la quantité de mouvement, on a

$$\rho(x_k,t^n) = \sum_{j=0}^{8} f_j(x_k,t^n), \qquad q(x_k,t^n) = \sum_{j=0}^{8} v_j f_j(x_k,t^n).$$

Classiquement, le schéma s'écrit d'une manière générale sous la forme

$$f_i(x_k,t^{n+1}) = f_i^*(x_k - v_i\Delta t, t^n)$$

où le symbole * désigne la fonction de distribution après une phase dite de collision. Dans le schéma de d'Humières [1], la phase de collision est diagonale dans l'espace des moments $m = Mf$ obtenus à l'aide d'une matrice fixe M de taille 9×9.

Nous proposons de faire dépendre la matrice M d'un champ de vitesses $\widetilde{u}$ donné *a priori* : $m(\widetilde{u}) = M(\widetilde{u})f$. Les problématiques de consistance ont déj été présentées au congrès SMAI 2013 et ont été soumises à review [3]. L'objectif de cette contribution est de présenter les résultats numériques de stabilité de cette nouvelle classe de schémas. On y étudie notamment l'influence du choix des polynômes définissant les moments et de leur représentation sur le réseau de vitesses. Plusieurs cas tests sont exhibés : stabilité linéaire à un point, stabilité non linéaire sur la cavité de Kelvin-Helmhotz.

Références

[1] D. d'Humières, *Generalized Lattice-Boltzmann Equations*, AIAA Rarefied Gas Dynamics: Theory and Applications, Progress in Astronautics and Aeronautics, **159**, pp. 450–458, 1992.

[2] A. Greiner, M. Geier, J.C. Korvink, *Cascaded digital lattice Boltzmann automata for high Reynolds number flow*, Phys. Rev. E, **73**, 066705, 2006.

[3] F. Dubois, T. Fevrier, B. Graille, *Lattice Boltzmann schemes with relative velocities*, arXiv:1312.3297.

Tony FEVRIER, `tony.fevrier@math.u-psud.fr`
Benjamin GRAILLE, `benjamin.graille@math.u-psud.fr`
Francois DUBOIS, `francois.dubois@cnam.fr`