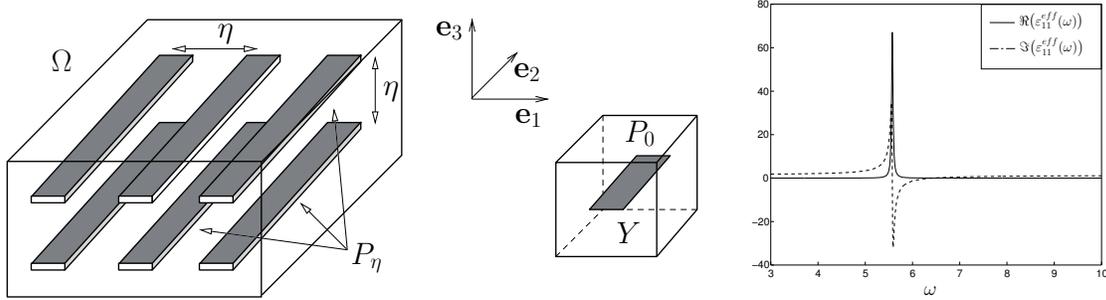


# Homogénéisation de métamatériaux à bande métalliques.

Christophe BOUREL, LMPA, Calais

**Mots-clés :** Homogénéisation, Métamatériaux, EDP, Convergence double échelle

Récemment, les avancées en micro et nano-technologies ont permis la construction de structures complexes présentant un comportement face aux ondes électromagnétiques que l'on ne retrouve pas dans des milieux naturels : par exemple des milieux à indice de réfraction négatif (i.e. de permittivité et de perméabilité négatifs). D'un point de vue mathématique, il à été étudié différentes structures composées de fils métalliques très fin ayant un comportement effectif décrit par un tenseur permittivité négatif. Citons [1] pour le cas 2D, [2] où un comportement non-local est mis en évidence et enfin [3] pour le cas 3D.



Dans ce travail, nous étudions une géométrie semblable à celle de [2] où les fibres métalliques parallèles sont remplacées par des bandes métalliques très fines (parallèles à  $\mathbf{e}_2$ ). Cette différence s'avère cruciale et conduit à des résultats très différents. En notant  $\eta$  la période séparant ces bandes,  $\theta_\eta$  leur taux de remplissage et  $\varepsilon_\eta = \varepsilon_r(\omega)/\theta_\eta$  la permittivité relative du métal utilisé, le champ électromagnétique total  $(\mathbf{E}_\eta, \mathbf{H}_\eta)$  vérifie les équations de Maxwell:  $\mathbf{rot} \mathbf{E}_\eta = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\eta$  et  $\mathbf{rot} \mathbf{H}_\eta = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon_\eta \mathbf{E}_\eta$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Alors que la largeur des bandes reste de l'ordre de  $\eta$  l'épaisseur  $h_\eta$  est telle que  $h_\eta/\eta \rightarrow 0$  (fraction volumique infinitésimale). Nous effectuons l'étude asymptotique  $\eta \rightarrow 0$  de ce problème à l'aide d'une méthode de convergence double échelle *relativement à une mesure* se concentrant sur la bande rééchelonnée  $P_0 \subset Y := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ . Celle-ci donne lieu à un problème de cellule non trivial pour la limite double échelle  $\mathbf{E}_0$  de  $\mathbf{E}_\eta$ . Il vient : pp.  $x \in \Omega$ ,  $\mathbf{E}_0(x, \cdot) \in W_\sharp^{1,2}(Y \setminus P_0)$ ,  $\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_0 = 0$  dans  $Y$  et  $\int_{\Omega \times Y} \mathbf{E}_0 \cdot \nabla \varphi + \varepsilon_r \int_{\Omega \times P_0} \mathbf{E}_0^T \cdot \nabla \varphi^T = 0$ . Le champ  $\mathbf{E}_0$  est alors caractérisé par les équations précédentes et peut se décomposer à l'aide de solutions élémentaires du problème microscopique  $u^1$  et  $u^2$ . On montre que le champ limite (faible)  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  est solution du problème effectif suivant où  $\gamma = |P_0| - \varepsilon_r \int_{P_0} \partial_2 u^2$ .

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon(x) \mathbf{E} \end{cases}, \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} I_3 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ \varepsilon^{\text{eff}} & \text{dans } \Omega \end{cases}, \quad \varepsilon^{\text{eff}} = I_3 + \varepsilon_r \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & |P_0| & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans la direction des bandes on retrouve exactement le comportement du métal de permittivité  $\varepsilon_r(\omega)$ . Dans la direction  $\mathbf{e}_1$  on obtient une permittivité dépendant de  $\varepsilon_r(\omega)$  et pouvant être négative lorsque  $\varepsilon_r(\omega)$  s'approche d'une valeur critique (négative) dépendant de la largeur de la bande (cf. figure dans le cas d'un modèle de Drude pour  $\varepsilon_r$ ). Pour finir, dans la direction  $\mathbf{e}_3$  la structure devient invisible.

## Références

- [1] BOUCHITTÉ, G. AND FELBACQ, D., *Homogenization of a set of parallel fibers*, Waves in Random Media, Vol. 7 , p. 1-12, (1997).
- [2] BOUCHITTÉ, G. AND FELBACQ, D., *Homogenization of a wire photonic crystal: the case of small volume fraction*, SIAM J. Appl. Math. 66, 2061 (2006)
- [3] BOUCHITTÉ, G. AND BOUREL, C., *Multiscale nanorod metamaterials and realizable permittivity tensors*, Commun. Comput. Phys. ,Vol. 11, p 489-507, (2012)