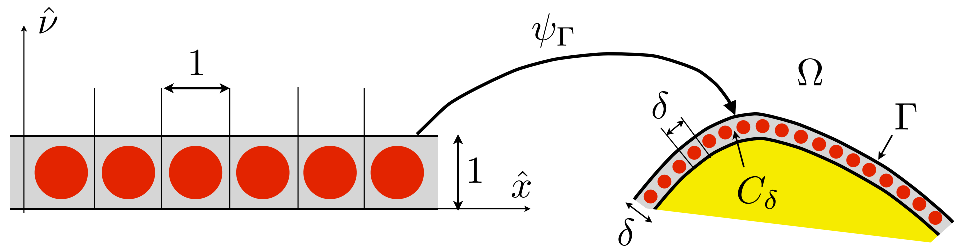
Effective boundary conditions for thin periodic coatings

Mathieu CHAMAILLARD, POEMS

Nous nous intéressons à la construction de conditions aux limites "équivalentes" pour la diffraction d'ondes par un obstacle 3D de frontière régulière Γ recouvert par une couche mince d'épaisseur δ dont les caractéristiques physiques varient périodiquement avec une période proportionnelle au petit paramètre δ. On note Ω le domaine extérieur et C_δ la couche mince et on pose $\Omega_\delta := \Omega \cup \overline{C}_\delta$.



Nous considérons l'équation des ondes scalaire:

$$\mathrm{div}\big(\rho^\delta\ \nabla u^\delta\big) + \omega^2 \mu^\delta\ u^\delta = f \text{ dans } \Omega_\delta \quad \text{avec } u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\delta, \tag{1}$$

où les coefficients ρ^δ et μ^δ sont supposés être constants dans Ω et "périodiques" dans C_δ. Si, dans le cas d'une couche plane, la notion de fonction périodique est claire, elle est ambigue - et non intrinsèque - pour une surface générale Γ. Pour contourner cette difficulté, nous avons choisi de définir (localement) Γ comme l'image d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ par une transformation régulière $\psi_\Gamma : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$. On peut alors (localement) voir la couche mince comme l'image d'une couche plane de référence d'épaisseur unité, $\mathcal{O}\times]0,1[$, qui coincide avec ψ_Γ sur $\mathcal{O} \times \{0\}$, et préserve les normales tout en réalisant un rescaling la direction normale (voir figure ci-dessus pour une illustration). Cette définition est censée modéliser les processus industriels de fabrication de la couche mince. Pour δ assez petit, on peut alors définir des coordonnées locales :$(x_\Gamma, \nu) \in \Gamma\times]0,\delta[$ et on appelle fonction périodique dans C_δ, une fonction de la forme:

$$g^\delta(x_\Gamma, \nu) := \hat{g}\big(\frac{x}{\delta}, \frac{\nu}{\delta}\big) \quad \text{oú } x_\Gamma = \psi_\Gamma(x) \tag{2}$$

et $\hat{g}(\hat{x}, \hat{\nu}) : \mathbb{R}^2\times]0,1[\mapsto \mathbb{C}$, est une fonction periodique en $\hat{x}$. En s'inspirant de [1], on combine alors les techniques d'homogénéisation avec la méthode des développements asymptotiques raccordés pour faire l'analyse asymptotique du problème (1) pour δ petit et en déduire une condition au bord d'ordre 2 de la forme:

$$\begin{cases} \partial_\nu u + (\delta B^1_\Gamma + \delta^2 B^2_\Gamma)\ u = 0 \text{ pour la condition de Neumann ,} \\ \partial_\nu u + (\delta^{-1} C^1_\Gamma + \delta^2 C^2_\Gamma)\ u = 0 \text{ pour les condition de Dirichlet,} \end{cases} \tag{3}$$

où $B^1_\Gamma, B^2_\Gamma, C^1_\Gamma$ et C^2_Γ sont des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre 2 (au plus) sur Γ dont les coefficients (fonctions de x_Γ), dépendent à la fois du tenseur de courbure de Γ, de la fonction ψ_Γ et des caractéristiques du matériaux dans la couche : ces coefficients se calculent en résolvant des problèmes de cellule elliptiques particuliers dans la géométrie de référence qui dépendent de x_Γ ces probl'emes font appel aux fonctions $\hat{\rho}$ et $\hat{\mu}$ associées à ρ^δ et μ^δ (cf. (2). Quand la couche est homogène, on retrouve bien les mêmes conditions que dans [2]. Nous avons pu démontrer que les problèmes aux limites extérieurs associés à (3) étaient bien posés et établir des estimations d'erreur, moyennant des hypothèses de régularité de la fonction ψ_Γ : si u^δ_2 d'esigne la solution associée à la condition (3), on montre que

$$\|u_\delta - u^n_\delta\|_{H^1(K)} \le C_K\ \delta^3, \quad \text{pour tout } K \subset \Omega \text{ borné tel que } /K \cap \Gamma = \emptyset.$$

Références

[1] Delourme, Bérangère and Haddar, Houssem and Joly, Patrick, *Approximate Models for Wave Propagation Across Thin Periodic Interfaces*, Jounal de mathématiques pures et appliquées.

[2] A. Bendali and K. Lemrabet, *The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, SIAM J. Appl. Math.*

Mathieu CHAMAILLARD, POEMS (UMR 7231 CNRS-ENSTA-INRIA) , 828, Boulevard des Marchaux, 91762 Palaiseau
`mathieu.chamaillard@inria.fr`