Schéma volumes finis pour une loi de conservation scalaire hyperbolique avec perturbation stochastique

Caroline BAUZET, I2M, Université d'Aix-Marseille

Julia CHARRIER, I2M, Université d'Aix-Marseille

Thierry GALLOUËT, I2M, Université d'Aix-Marseille

Mots-clés : EDP stochastique, problème hyperbolique du premier ordre, bruit multiplicatif, formule d'Itô, méthode volumes finis, schéma upwind, mesure de Young, entropie de Kruzhkov ...
On s'intéresse au problème de Cauchy pour une loi de conservation scalaire hyperbolique non-linéaire avec perturbation stochastique dont l'écriture probabiliste est :

$$du + \operatorname{div}\left[\vec{V} f(u)\right] dt = g(u) dW \text{ dans } \Omega \times]0, T[\times \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

i.e., en notant $Q =]0, T[\times \mathbb{R}^d$, P-presque sûrement dans Ω et pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(Q)$:

$$\int_Q u(x,t)\partial_t\varphi(x,t)dxdt + \int_Q \operatorname{div}\left[\vec{V} f(u(x,t))\right]\varphi(x,t)dxdt = \int_Q \int_0^t g(u(x,s))dW(s)\partial_t\varphi(x,t)dxdt.$$

Notons que, même dans le cas déterministe il n'y a pas (en général) unicité des solutions faibles pour ces lois de conservation scalaires non-linéaires. Le défi mathématique consiste alors à poser un critère qui permette de sélectionner parmi toutes les solutions faibles la solution physiquement admissible. Nous utilisons dans ce travail une version stochastique du critère d'entropie introduit par S.N. Kruzhkov dans les années 70. Dans un travail récent, C. Bauzet, G. Vallet et P. Wittbold [1] ont montré l'existence et l'unicité de la solution faible entropique stochastique du Problème (1).
L'objectif de notre travail [2] est d'approcher par la méthode volumes finis cette solution. On considère $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement Brownien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, continu, de dimension 1 et à valeurs réelles, défini sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que

- H_1: $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.
- H_2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne, croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 0$.
- H_3: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne, à support compact dans $\mathbb{R}$ et telle que $g(0) = 0$.
- H_4: $\vec{V} \in \mathbb{R}^d$.

La principale difficulté de cette étude porte sur l'obtention des formulations entropiques discrètes vérifiées par la solution du schéma volumes finis. La version stochastique des inégalités d'entropies contient deux nouveaux termes qu'il convient de prendre en compte avec attention : une intégrale stochastique qui apporte des contraintes de mesurabilité, et une intégrale incluant la dérivée seconde de l'entropie. À cause de ce deuxième terme, il n'est pas possible comme en déterministe de proposer une formulation entropique en entropies de Kruzhkov, nous sommes limités à l'utilisation d'entropies régulières. Ceci restreint le nombre de techniques déterministes disponibles : pour un flux plus général, nous ne pouvons en effet pas traiter pour le moment tous les schémas à flux monotones par cette approche entropique. Nous considérons ici un schéma upwind décentré explicite en temps. Par le biais des solutions très faibles (solutions mesures) et sous une condition de CFL particulière, nous montrons la convergence de la solution du schéma vers l'unique solution entropique généralisée du problème. Le résultat d'unicité introduit dans [1] nous permet de conclure que la convergence a finalement lieu vers l'unique solution faible entropique du Problème (1).

References

[1] C. Bauzet, G. Vallet and P. Wittbold, *The Cauchy problem for a conservation law with a multiplicative stochastic perturbation*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 2012.

[2] C. Bauzet, J. Charrier and T. Gallouët, *Finite volume method for a scalar conservation law with a multiplicative stochastic perturbation*, en préparation.

Caroline BAUZET, CMI-Bureau 315, 39 rue Frédéric Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13
caroline.bauzet@univ-amu.fr