

Méthodes numériques pour des équations de transport avec conditions de transmission.

Benjamin AYMARD, UPMC Univ Paris 06 LJLL

Marie POSTEL, UPMC Univ Paris 06 LJLL

Frédérique CLEMENT, Inria-Paris-Rocquencourt

Frédéric COQUEL, CNRS - CMAP

Cette communication est consacrée au traitement numérique des conditions de transmission dans les équations de transport (équations à flux discontinus, équations non conservatives...).

Dans une première partie, nous présentons des conditions de transmission originales, issues d'un problème de cinétique cellulaire. Le modèle du processus de sélection des follicules ovariens que nous étudions ([3], [4]), entités biologiques situées dans les ovaires et contenant les ovocytes, met en jeu une dynamique de population structurée de cellules. L'évolution en temps de la population est modélisée par un système d'équations de transport non conservatives en 2D, dans un plan âge-maturité découpé en sous domaines (correspondant aux différentes phases cellulaires), où les inconnues sont les densités de cellules. Dans tous les cas les vitesses sont discontinues aux interfaces entre les sous domaines. Pour fermer le problème, des conditions sur les flux sont imposées. L'une des originalités de ce modèle est la condition de type mitose, où la population double au passage d'une interface.

Dans une seconde partie nous proposons une méthode numérique pour prendre en compte ce type de conditions dans une méthode de type volumes finis d'ordre élevé en maillage uniforme. Nous montrons en particulier comment préserver l'ordre élevé du schéma ([2]) au prix d'une modification des flux numériques au voisinage des interfaces.

Enfin, nous étudions l'impact de ce type de condition de transmission sur une méthode de maillage adaptatif piloté par une analyse multirésolution de la solution. L'approximation faite sur la solution pour la représenter sur un maillage hybride génère un bruit numérique qui s'amplifie au cours du temps au passage des conditions de flux non conservatives. Ce phénomène présente deux principaux inconvénients: d'une part, le raffinement du maillage dans les zones de bruit pénalise le temps de calcul et augmente la mémoire nécessaire, d'autre part, la précision du schéma numérique est dégradée. Nous proposons et validons numériquement une solution pour filtrer ce type de bruit ([1]).

Références

- [1] B. AYMARD, F. CLÉMENT, M. POSTEL, *Adaptive mesh refinement strategy for a non conservative transport problem*. Submitted, 2014.
- [2] B. AYMARD, F. CLÉMENT, F. COQUEL, M. POSTEL, *A numerical method for transport equations with discontinuous flux functions : application to mathematical modeling of cell dynamics*. SIAM Journal of Scientific Computing, 2013.
- [3] D. MONNIAUX, F. CLÉMENT, *Multiscale modelling of ovarian follicular selection*. Progress in Biophysics and Molecular Biology, 2012.
- [4] N. ECHENIM, D. MONNIAUX, M. SORINE, F. CLÉMENT, *Multi-scale modeling of the follicle selection process in the ovary*. Mathematical Biosciences, 2005.