Approches Galerkin Discontinu pour les modèles de Saint-Venant et Green-Naghdi

Arnaud DURAN, I3M, Université Montpellier II

Mots-clés : Méthode Galerkin Discontinu, Shallow Water, Green Naghdi, Termes Source, Schéma d'ordre élevé , Well-Balancing.

Le but de la présentation est de proposer des avancées récentes concernant des méthodes type Galerkin Discontinu pour deux modèles d'écoulement classiques : Shallow Water (SW) et Green Naghdi (GN).

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux problématiques fondamentales du Well-Balancing et de la préservation de la positivité de la hauteur d'eau pour les équations SW. Dans un contexte 2D non structuré, l'obtention de ces deux propriétés est loin d'être triviale, en particulier lorsque l'on considère des approches dG. La stratégie proposée combine une sélection d'outils numériques permettant d'assurer ces deux propriétés. En particulier, dans la continuité de récents travaux en Volumes Finis [2], nous partirons d'une reformulation type *pre-balanced* du système:

$$\partial_t W + \nabla \cdot H(W,z) = S(W,z)\,, \tag{1}$$

$$W = \begin{pmatrix} \eta \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}\ ,\ H(W,z) = \begin{pmatrix} q_x & q_y \\ uq_x + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z) & vq_x \\ uq_y & vq_y + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z) \end{pmatrix}\ ,\ S(W,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g\eta\partial_x z \\ -g\eta\partial_y z \end{pmatrix}.$$

Ci-dessus, $\mathbf{u} = (u,v)$ désigne le champ de vitesse, $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ le débit et z la topographie.
Nous verrons comment cette formulation, dans laquelle la hauteur d'eau h est remplacée par la surface libre $\eta := h + z$ en tant que variable, permet d'accéder de manière très simple au Well-Balancing. La robustesse est assurée par une méthode récemment introduite par Zhang *et al.* [4], basée sur le principe du maximum. Des validations numériques dans les cas $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ sont proposées.

La seconde partie de l'exposé sera consacrée à une description succincte d'un schéma 1D pour les équations GN. Suivant les idées de Lannes et Marche [3], nous donnerons une nouvelle formulation du modèle, mieux adaptée vis-à-vis du Well-Balancing et du temps de calcul notamment. De manière plus précise, nous introduirons un système d'équations asymptotiquement équivalent à celui proposé par Bonneton *et al* [1], faisant intervenir un opérateur elliptique indépendant du temps. Le système obtenu peut se réécrire d'une façon similaire à la version 1D de (1), dans laquelle les effets dispersifs apparaissent à travers un terme source additionnel. A cet effet, nous évoquerons les problématiques liées à l'inclusion de ces termes, en particulier l'évaluation des dérivées d'ordre élevé ainsi que la prise en compte du déferlement. Les propriétés du schéma numérique sont illustrées à travers une nouvelle série de cas tests.

Références

[1] P. Bonneton, F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, M. Tissier., *A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green Naghdi model.*, J. Comput. Phys., 230:1479-1498, 2011.

[2] A. Duran, F. Marche, and Q. Liang., *On the well-balanced numerical discretization of shallow water equations on unstructured meshes.*, J. Comput. Phys., 235:565–586, 2013.

[3] D. Lannes, F. Marche, *A 2D numerical model for the fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi model*, Submitted, 2013

[4] X. Zhang, Y. Xia, and C.-W. Shu., *Maximum-principle-satisfying and positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for conservation laws on triangular meshes.*, J. Sci. Comp., 50:29–62, 2012.

Arnaud DURAN, Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier (I3M), Université Montpellier II. Place Eugne Bataillon, CC051, 34090 Montpellier Cedex 5, France.
`arnaud.duran@univ-montp2.fr`