# Résultats de régularités pour des problèmes elliptiques avec donnée sous la forme de mesure


**Sadjiya Ariche**, Université de Valenciennes

**Colette De Coster**, Université de Valenciennes

**Serge Nicaise**, Université de Valenciennes


Dans ce travail (voir [1] pour les détails), on étudie les solutions de l'équation de Laplace:

$$-\Delta u = g\delta_\sigma \quad \text{dans } Q \subseteq \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

où $\delta_\sigma$ est la masse de Dirac sur une fissure $\sigma$ de $Q$ et $g \in L^2(\sigma)$.

On distingue deux cas:

> Dans le premier, on prend $\sigma = \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$ une droite entière et $Q := \Omega \times \mathbb{R}$ un cylindre de $\mathbb{R}^3$ avec $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$. Une application de la transformée de Fourier au problème (1) permet de le résoudre en résolvant les problèmes
>
> $$\begin{cases} (-\Delta + \xi^2)v_\xi = \delta_0 & \text{dans } \Omega, \\ v_\xi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$
>
> où $\xi$ est un paramètre réel (pour le cas $\xi = 0$, voir [2]).
>
> Dans le deuxième, $Q = \mathbb{R}^3$ et $\sigma$ est une demi droite de $\mathbb{R}^3$. A nouveau, une application de la transformée de Mellin au problème (1) permet de le résoudre en résolvant les problèmes
>
> $$(L_{S^2} + \lambda^2 + \lambda)v_\lambda = \delta_B, \quad \text{dans } S^2, \tag{3}$$
>
> où $B$ est l'intersection de la sphère $S^2$ avec la demi droite $\sigma$, $L_{S^2}$ est l'opérateur de Laplace Beltrami et $\lambda = -\frac{1}{2} - \epsilon + i\xi$ avec $\epsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

D'abord, on discute de l'existence et l'unicité d'une solution de (2) (resp. (3)) dans $W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $W^{1,p}(S^2)$) pour $p < 2$ (à cause de la masse de Dirac, le second membre n'est pas dans $H^{-1}(\Omega)$ (resp. $H^{-1}(S^2)$)). Ensuite, grâce à des résultats de [3], on montre la régularité de la solution $v_\xi$ de (2) (resp. $v_\lambda$ de (3)) et des estimations a priori uniformes en $\xi$ (resp. en $\lambda$) dans les espaces de Sobolev avec poids. Par la transformée de Fourier (resp. Mellin) inverse, on obtient des résultats de régularité pour $u$, solution de (1), dans des espaces de Sobolev à poids.

## Références


[1] S. Ariche, C. De Coster et S. Nicaise, *Regularity of Solutions of Elliptic Problem with Dirac Measures as Data,* article in preparation.

[2] R. Araya, E. Behrens et R. Rodriguez, *A Posteriori Error Estimates for Elliptic Problems with Dirac Delta Source Terms,* Numer. Math. 105 (2006), pp. 2, 193?216.

[3] M. Costabel, M. Dauge et S. Nicaise, *Corner Singularities and Analytic Regularity for Linear Elliptic Systems,* book in preparation.



**Sadjiya Ariche**, LAMAV, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 VALENCIENNES Cedex 9
sadjiya.ariche@etu.univ-valenciennes.fr