Analyse d'erreurs de la méthode de pénalité-projection vectorielle avec une condition aux limites ouvertes

Rima CHEAYTOU, Aix-Marseille Université, I2M, CNRS, UMR 7373

Philippe ANGOT, Aix-Marseille Université, I2M, CNRS, UMR 7373

On s'intéresse ici à la méthode de pénalité-projection vectorielle [1, 2] appliquée aux équations de Navier-Stokes incompressible et associée à une condition de sortie notée (OBC3) que nous proposons ci-dessous sur une partie du bord du domaine. En considérant $\mathbf{v}^{n+1} = \widetilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \widehat{\mathbf{v}}^{n+1}$ le vecteur vitesse et p^{n+1} le champ de pression, on aboutit au schéma numérique suivant:

•Etape de pénalité-prédiction vectorielle:

$$\frac{3\widetilde{\mathbf{v}}^{n+1} - 4\widetilde{\mathbf{v}}^{n} + \widetilde{\mathbf{v}}^{n-1}}{2\delta t} - \mu\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^{n+1} + NLT_1 + \nabla p^{\star,n+1} = \mathbf{f}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[, \tag{1}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \mathbf{v}_D \quad \text{sur } \Gamma_D\times]0,T[, \tag{2}$$

$$-p^{\star,n+1}\,\mathbf{n} + \mu\,\nabla\widetilde{\mathbf{v}}^{n+1}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{g}^{n+1} \quad \text{sur } \Gamma_N\times]0,T[. \tag{3}$$

Ici μ désigne la viscosité du fluide, $\mathbf{n}$ la normale unitaire sortante, $\mathbf{v}_D$ une condition de Dirichlet donnée, $\mathbf{f}$ est le terme source et $\mathbf{g}$ est une force extérieure surfacique. Notons que $p^{\star,n+1} = 2p^n - p^{n-1}$ est extrapolée à l'ordre deux en temps et le terme nonlinéaire $NLT1$ est linéarisé par $NLT_1 = 2(\mathbf{v}^n\cdot\nabla)\mathbf{v}^n - (\mathbf{v}^{n-1}\cdot\nabla)\mathbf{v}^{n-1}$.

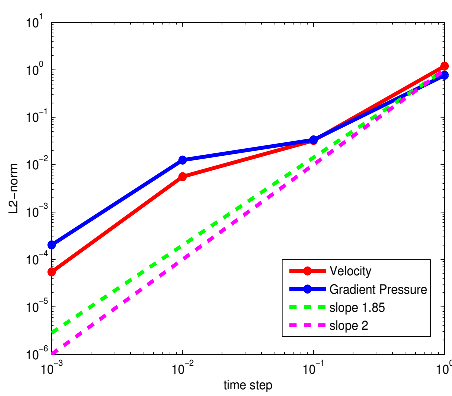
• Etape de pénalité-projection vectorielle avec un paramètre de pénalité $0 < \varepsilon \leq 1$:

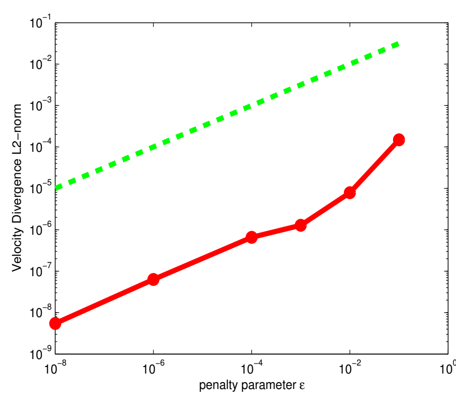
$$\frac{3\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} - 4\widehat{\mathbf{v}}^{n} + \widehat{\mathbf{v}}^{n-1}}{2\delta t} - \mu\,\Delta\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot\widehat{\mathbf{v}}^{n+1}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot\widetilde{\mathbf{v}}^{n+1}\right) \quad \text{dans } \Omega\times]0,T[, \tag{4}$$

$$\widehat{\mathbf{v}}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D\times]0,T[, \tag{5}$$

$$\mu\,\nabla\widehat{\mathbf{v}}^{n+1}\cdot\mathbf{n} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\nabla\cdot\mathbf{v}^{n+1}\right)\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N\times]0,T[\quad \text{(OBC3)}. \tag{6}$$

Le but est d'établir les estimations d'erreurs de cet algorithme pour le problème de Stokes et de les valider par des tests numériques. Les estimations théoriques obtenues garantissent une convergence d'ordre deux en temps pour la vitesse et la pression. Finalement, les tests numériques effectués confirment bien les résultats théoriques obtenus.





Références

[1] Ph. Angot and R. Cheaytou, *Vector penalty-projection methods for incompressible fluid flows with open boundary conditions*, in Algoritmy 2012 - (A. Handlovicočá et al. Eds), Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing House of STU (Bratislava) p.219–229, 2012.

[2] Ph. Angot and R. Cheaytou, *Vector penalty-projection methods for outflow boundary conditions with optimal second-order accuracy*, Journal of Computational Physics, (in revision), 2014.

Rima CHEAYTOU, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France
rima.cheaytou@gmail.com