Comportement en temps long d'un intégrateur exponentiel pour un système de Vlasov-Poisson avec un champ magnétique fort.

Mathieu LUTZ, IRMA, Strasbourg

Emmanuel Frénod, Université Bretagne-Sud

Sever A. Hirstoaga, Inria Nancy-Grand Est

Eric Sonnendrücker, Max Planck Institute for Plasma Physics,

Les intégrateurs exponentiels font parti des techniques numériques spécialement adaptées aux systèmes fortement oscillants. Considérons par exemple une ODE raide du type :

$$u'(t) = \frac{1}{\varepsilon} M u(t) + F(t, u(t)), \quad u(0) = u_0,$$

où ε est un petit paramétre, M est la matrice d'une rotation d'angle $\pi/2$ et où F correspond à un terme non-linéaire représentant le champ électrique. Un intégrateur exponentiel consiste à résoudre de façon exacte le terme linéaire (raide) en utilisant la formule de variation de la constante

$$u(t) = e^{\frac{t}{\varepsilon}M} u_0 + \int_0^t e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}M} F(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

La partie raide étant résolue, le point clé de la méthode concerne la résolution numérique de l'intégrale. Le traitement numérique de ce terme fait l'objet d'une littérature abondante (voir Cox & Matthews [1], Hochbrück & Ostermann [2]).
Dans un travail récent (voir [3]), les auteurs ont construit un intégrateur exponentiel pour résoudre un système de Vlasov-Poisson fortement oscillant ($1D$ en position et $1D$ en vitesse). Le traitement numérique du terme intégral a été réalisé en utilisant les hypothèses de quasi-périodicité des trajectoires des particules et du champ éléctrique qu'elles produisent. Le schéma numérique ainsi obtenu permet de prendre des pas de temps très grands devant la période de rotation des particules, tout en restant précis.
Dans cet exposé je vais présenter une généralisation de cet algorithme dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson avec un champ magnétique fort ($2D$ en position et $2D$ en vitesse (voir [4]). Dans ce cas les particules évoluent selon deux échelles de temps disparates : une dérive lente d'une quantité appelée centre-guide et une oscillation rapide de la particule autour de celui-ci. L'advection en vitesse a été réalisée en utilisant un intégrateur exponentiel. A nouveau, l'hypothèse clé pour traiter le terme intégral est la quasi-périodicité du champ électrique auto-consistant évalué aux positions des particules. Concernant les positions, nous avons résolu les carctéristiques sur une période puis, nous avons poussé les particules. Cette poussée est équivalente à une approximation linéaire du centre-guide. Le temps de calcul est considérablement réduit.

Références

[1] S. M. Cox and P. C. Matthews, *Exponential time differencing for stiff systems*, J. Comput. Phys., 2002.

[2] M. Hochbrück and A. Ostermann, *Exponential integrators*, Acta Numerica, 2010 :209?286, 2010.

[3] E. Frénod, S. A. Hirstoaga, and E. Sonnendrücker, *An exponential integrator for a highly oscillatory Vlasov equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2014 (In Press).

[4] E. Frénod, S. A. Hirstoaga, and E. Sonnendrücker, *Long time behaviour of an exponential integrator for a Vlasov-Poisson system with strong magnetic field*, (Submitted).

Mathieu LUTZ, IRMA, UMR 7501 7 rue Ren-Descartes 67084 Strasbourg Cedex, France
mathieu.lutz@unistra.fr