Conditions de transmission optimisées pour méthodes de décomposition de domaines appliquées à un problème de diffraction

Matthieu LECOUVEZ, CEA/Cesta

Bruno STUPFEL, CEA/Cesta

Patrick JOLY, Equipe Poems INRIA

Francis COLLINO, CERFACS

La difficulté majeure des méthodes de décomposition de domaines réside dans le choix du couplage entre les sous-domaines, c'est-à-dire les conditions de transmission imposées aux interfaces des sous-domaines. Les conditions les plus utilisées dans la littérature pour l'équation d'Helmholtz sont celles développées par Després dans [1], ou celles d'ordre plus élevé (par exemple [2]). Mais ces conditions sont locales (exprimées en terme d'opérateurs différentiels) et ne permettent pas, en général, de convergence géométrique. Nous proposons de nouvelles conditions de transmission:

$$\begin{cases} \partial_{n_1} u_1 + zTu_1 = \partial_{n_1} u_2 + zTu_2, \text{ sur } \Sigma_{12} \\ \partial_{n_2} u_2 + \overline{z}Tu_2 = \partial_{n_2} u_1 + \overline{z}Tu_1, \text{ sur } \Sigma_{21} \end{cases} \tag{1}$$

basées sur des opérateurs linéraires $T \in \mathcal{L}\left(H^s(\Sigma), H^{-s}(\Sigma)\right)$ pour un $s > 0$, et ou z est un complexe. Si T est injectif et $\mathcal{I}(z) \neq 0$, alors ces conditions sont équivalentes aux conditions exactes $u_1 = u_2$, and $\partial_{n_1} u_1 = -\partial_{n_2} u_2$. En ajoutant les deux hypothèses suivantes :

- T s'écrit $T = \Lambda^* \Lambda$, où $\Lambda \in \mathcal{L}\left(H^s(\Sigma), L^2(\Sigma)\right)$.
- $s = \frac{1}{2}$

alors il est possible de prouver dans un cadre général la convergence exponentielle de méthodes itératives type Jacobi ou Gauss-Seidel. Cependant la seconde hypothèse impose un opérateur non local. Pour constuire un tel opérateur, on utilise, comme le suggère les potentiels de Riesz [3], un noyau intégral :

$$\Lambda u(x) = u(x) - \beta \mathrm{div} \int_\Sigma |x-y|^{\frac{1}{2}} \nabla u(y) d\sigma(y) \tag{2}$$

Dès que $\mathcal{I}(\beta) \neq 0$, l'opérateur Λ vérifie toutes les conditions requises pour obtenir une convergence exponentielle des méthodes itératives type Jacobi, Gauss-Seidel ou GMRES. Une étude analytique sur un cas simple et des résultats numériques seront présentés pour montrer comment optimiser les différents paramètres et réduire le taux de convergence de la méthode de décomposition de domaine.

Références

[1] Després B., *Domain decomposition method and the Helmholtz problem*, Second international conference on mathematical and numerical aspect of wave propagation phenomena SIAM, 1993.

[2] Gander M., et al., *Optimized Schwarz methods without overlap for the Helmholtz equation*, SIAM Journal on Scientific Computing, 2002.

[3] Stein E., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

Matthieu LECOUVEZ, CEA Cesta, 15 avenue des sablières, 33115 Le Barp
matthieu.lecouvez@cea.fr
Bruno STUPFEL, CEA Cesta, 15 avenue des sablières, 33115 Le Barp
bruno.stupfel@cea.fr
Patrick JOLY, ENSTA ParisTech, 828, Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau
patrick.joly@inria.fr
Francis COLLINO, ENSTA ParisTech, 828, Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau
francis.collino@cerfacs.fr