Un schéma à mailles décalées convergent pour les équations de Navier-Stokes incompressibles à masse volumique variable

Khaled SALEH, Université d'Aix-Marseille et IRSN

Jean-Claude LATCHÉ, IRSN

Ce travail s'inscrit dans une démarche de développement de schémas pour le calcul d'écoulements à tout nombre de Mach qui a débuté il y a maintenant quelques années. Les schémas étudiés sont fondés sur une technique de discrétisation spatiale à mailles décalées : schéma MAC pour les maillages structurés et schéma avec, à chaque face, des degrés de liberté pour toutes les composantes de vitesse pour les maillages quelconques. Un ingrédient essentiel de ces algorithmes est un opérateur de convection original, qui a pour propriété de permettre l'obtention d'une équation de bilan d'énergie cinétique discrète. Des variantes implicites [1, 2] ou explicites [3] ont été mises au point. Sur le plan théorique, nous avons démontré à ce jour des propriétés de stabilité et de consistance en 1D. Nos efforts portent aujourd'hui, entre autres, sur l'extension de ces résultats théoriques aux problèmes multidimensionnels. A ce titre, nous étudions ici un schéma implicite pour le modèle simplifié des équations de Navier-Stokes incompressibles à masse volumique variable (voir Eq. (1) ci-dessous), fondé sur l'opérateur de convection précité ainsi que sur une discrétisation par éléments finis de type Rannacher-Turek [4] pour la diffusion.

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u}) = 0, \tag{1a}$$
$$\partial_t(\rho\, \boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\nabla} p = 0, \tag{1b}$$
$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0. \tag{1c}$$

Nous démontrons que le schéma préserve les propriétés de stabilité du problème continu (estimation L^∞ pour la masse volumique et estimations $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{L}^2)$ et $\mathrm{L}^2(\mathrm{H}^1)$ pour la vitesse), ce qui par un argument de degré topologique entraîne l'existence du schéma. Puis, grâce à des techniques de compacité et en passant à la limite dans le schéma, nous démontrons que toute suite de solutions discrètes (obtenue par une suite de discrétisations dont les pas d'espace et de temps tendent vers zéro) converge, à l'extraction d'une sous-suite près, vers une solution faible du problème continu.

Références

[1] T. Gallouët, L. Gastaldo, R. Herbin, J.-C. Latché, *An unconditionally stable pressure correction scheme for compressible barotropic Navier-Stokes equations*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 42:303–331, 2008.

[2] R. Herbin, W. Kheriji, J.-C. Latché, *Staggered schemes for all speed flows*, ESAIM Proceedings, 35:122–150, 2012.

[3] R. Herbin, J.-C. Latché, T.T. Nguyen, *Explicit staggered schemes for the compressible Euler equations*, ESAIM Proceedings, to appear, 2013.

[4] R. Rannacher, S. Turek, *Simple nonconforming quadrilateral Stokes element*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 8:97–111, 1992.

Khaled SALEH, LATP UMR 7353 Université d'Aix-Marseille et Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)
khaled.saleh@irsn.fr