Structure des équations Green-Naghdi

Dena Kazerani, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Mots-clés : Equations de Green-Naghdi, Formulation Lagrangienne, Formulation Hamiltonienne, Loi de conservation

On étudie dans ce travail la structure des équations de Green-Naghdi qu'on peut obtenir par une approximation shallow-water des équations d'Euler incompressibles:

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu + \partial_y hv = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x hu^2 + \partial_y huv + \partial_x \mathcal{P}(h) + \partial_x (h^2 \ddot{h})/4 = 0, \\ \partial_t hv + \partial_x huv + \partial_y hv^2 + \partial_y \mathcal{P}(h) + \partial_y (h^2 \ddot{h})/4 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où h est ma hauteur d'eau, u et v sont les composantes horizontales de la vitesse et $\mathcal{P}$ la pression hydrostatique classique. De plus $\dot{()} = \partial_t() + u\partial_x()$ représente la dérivée matérielle. Une égalité d'énergie est bien associée à ces équations. Tout d'abord, on monterera, en suivant [1] qu'il existe une vorticité généralisée Ω pour le système qui satisfait $\partial_t \Omega + \partial_x(\Omega u) + \partial_y(\Omega v) = 0$.

On effectue ensuite, un changement de variable Lagrangien $(t, x, y) \to (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ et on pose $b = \frac{1}{h}$. On obtient ainsi les équations Green-Naghdi Lagrangienne suivantes,

$$\begin{cases} \partial_{\tilde{t}} b - \partial_{\tilde{x}} u - \partial_{\tilde{y}} v = 0, \\ \partial_{\tilde{t}} u + \partial_{\tilde{x}} F = 0, \\ \partial_{\tilde{t}} v + \partial_{\tilde{y}} F = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où

$$F = -\frac{\delta A}{\delta b} \quad \text{avec} \quad A(b, \partial_{\tilde{t}} b) = \frac{g}{2b} - \frac{1}{8}\frac{(\partial_{\tilde{t}} b)^2}{b^4}, \quad \frac{\delta A}{\delta b} \text{ est la dérivée variationnelle de } A \text{ par rapport à } b. \tag{3}$$

Inspirés par [3], on munit (2) d'une structure Hamiltonienne. On dispose aussi d'une structure Lagrangienne dans le cas d'un espace mono-dimensionnel. On peut ainsi trouver une nouvelle loi de conservation pour (2) mono-dimensionnel. ([2]).

L'objectif principal est en fait de déduire des propriétés des solutions de (1) en se basant sur des propriétés structurelles de (2) . Ce travail est fait en collaboration avec Nicolas Seguin (UPMC, Inria Ange), Corentin Audiard (UPMC), Pascal Frey (UPMC) et Jacques Sainte-Marie(Inria Ange).

Références

[1] S. L. Gavrilyuk and V. M. Teshukov. Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 13(6):365–382, 2001.

[2] S. L. Gavrilyuk and S. M. Shugrin. Media with state equations that depend on the derivatives. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 37(2):35–49, 1996.

[3] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, and S. Descombes. On the well-posedness for the Euler-Korteweg model in several space dimensions. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(4):1499–1579, 2007.

Dena Kazerani, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 5, Place Jussieu, 75252, Paris
`kazerani@ljll.math.upmc.fr`