Une formulation faible pour les systèmes de Friedrichs en domaine borné

Clément MIFSUD, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Dans le cadre de cette communication, nous nous intéressons au système de Friedrichs ([3]) suivant

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i} U = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ U(0,x) = U_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier inclus dans $\mathbb{R}^n$, A_i est une matrice symétrique dont les coefficients sont indépendants du temps et de l'espace et U_0 est la donnée initiale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ce système doit être fermé par une condition de bord :

$$(A_\nu(x) - M(x))U(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \tag{2}$$

avec $A_\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x) A_i$ (où $(\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_n(x))$ est la normale extérieure à Ω au point x) et M est une matrice symétrique positive (dépendant de x) qui vérifie les hypothèses suivantes

$$\forall x \in \partial\Omega, \qquad \ker A_\nu(x) \subset \ker M(x) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^n = \ker(A_\nu(x)) - M(x)) + \ker(A_\nu(x)) + M(x))).$$

Les systèmes de Friedrichs en domaine borné ont fait l'objet de nombreux travaux de recherches (résumés dans [1]). Le problème, que nous considérons, est de pouvoir donner un sens à la condition de bord (2) en fonction de la régularité de la solution U.
Nous proposons ici une définition de solution à la Kruzhkov (proche de celle développée dans [2] dans l'espace tout entier). On dit que $U \in L^2((0,T) \times \Omega)$ est solution de (1) et (2) si, pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{D}([0,T) \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left[|U(t,x) - k|^2 \, \partial_t \varphi(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \left(U(t,x) - k | A_i (U(t,x) - k) \right) \partial_{x_i} \varphi(t,x) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_\Omega |U_0(x) - k|^2 \, \varphi(0,x) \mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(k_+ | M(x) k_+ \right) \varphi(t,x) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

avec $k \in \mathbb{R}^n$ (indépendant de t et x) et k_+ la composante de k sur $(\ker(A_\nu(x)) + M(x)) \cap \mathrm{Im}\ A_\nu(x)$ dans la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \ker A_\nu(x) \oplus \left((\ker(A_\nu(x) - M(x))) \cap \mathrm{Im}\ A_\nu(x) \right) \oplus \left((\ker(A_\nu(x) + M(x))) \cap \mathrm{Im}\ A_\nu(x) \right).$$

Nous présenterons les avantages de cette formulation par rapport aux formulations classiques de ce type de problème.
Un premier résultat évident étant que la condition de bord (2) n'apparaît pas explicitement dans (3).
Nous établierons ensuite des résultats d'existence et d'unicité sous les hypothèses classiques auxquelles sont soumis ce genre de système (cf [1]) .
Travail en collaboration avec B. Després, J-F. Babadjian et N. Seguin (Laboratoire Jacques-Louis Lions).

Références

[1] S. Benzoni-Gavage & D. Serre, *Multi-dimensional Hyperbolic Partial Differential Equations*, Oxford University Press, 2007.

[2] B. Després, F. Lagoutière & N. Seguin, *Weak solutions to Friedrichs systems with convex constraints*, Nonlinearity, 24, no.11, pp 3055-3081, 2011.

[3] K.O. Friedrichs, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 7, pp 345-392, 1954.

Clément MIFSUD, Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris, France
`mifsud@ljll.math.upmc.fr`