Caractérisation et approximation des limites singulières : le cas des lois de conservation

Boris ANDREIANOV, LMB, CNRS UMR 6623, Université de Franche-Comté, Besançon

Le problème de Cauchy et des problèmes aux limites pour les lois de conservation scalaires $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ (notés (P) dans la suite) ont donné lieu à une théorie particulièrement riche et non-triviale en ce qui concerne l'interprétation rigoureuse de l'équation et des conditions aux limites associées ([8, 7]). Une façon souvent utilisée pour commencer à parler de "u solution de (P)" est de voir u comme limite d'une suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ des solutions des problèmes (P^ε) approchant (P). D'un point de vue de modélisation, (P^ε) doit alors représenter un modèle très proche du phénomène qu'on souhaite modéliser par (P). Et d'un point de vue mathématique, (P^ε) doit être un problème "plus simple" (admettant, par exemple, des solutions faciles à caractériser). Enfin, (P) doit être "une limite" de $(P^\varepsilon)_\varepsilon$, mais dans la pratique il s'agit, au départ de l'analyse, d'un passage à la limite purement formel. Dans cet exposé, nous verrons que (P) est souvent une *limite singulière* de $(P^\varepsilon)_\varepsilon$, ce qui veut dire que les propriétés qualitatives, le cadre fonctionnel, la définition même d'une solution, ainsi que les stratégies de son approximation numérique pour u et pour u^ε peuvent être drastiquement différentes. Deux questions fondamentales se posent :

- Hormis ces propriétés de u^ε qui "ne passent pas à la limite", lesquelles sont héritées par u ?
- Peut-on caractériser une limite singulière u intrinsèquement par de telles propriétés, sans faire appel à la connaissance d'une suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ qui l'engendre ?

Sans prétendre à une quelconque exhaustivité, on illustrera l'approche "par limites singulières" à l'aide de quelques idées et résultats récents ([1, 2, 3, 4, 5, 6]) portant sur la prise en compte des conditions aux limites (autres que Dirichlet, [7]) et des conditions de couplage par une interface interne pour les lois de conservation scalaires. On soulignera l'apport de la bonne compréhension théorique de tels problèmes pour la construction des schémas d'approximation, ainsi que le rôle joué par les concepts issus de l'analyse numérique dans la formulation et l'étude théorique des lois de conservation.

Références

[1] B. Andreianov and C. Cancès, *Vanishing capillarity solutions of Buckley-Leverett equation with gravity in two-rocks medium*, Comput. Geosci., 17(3), pp.551-572, 2013.

[2] B. Andreianov and C. Cancès, *On interface transmission conditions for conservation laws with discontinuous flux of general shape*, HAL preprint, hal.archives-ouvertes.fr/hal-00940756

[3] B. Andreianov, P. Goatin and N. Seguin, *Finite volume schemes for locally constrained conservation laws*, Numerische Math. 115(4), pp.609-645, 2010.

[4] B. Andreianov, K.H. Karlsen and N.H. Risebro, *A theory of L^1-dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux*, Arch. Ration. Mech. Anal. 201, pp.27-86, 2011.

[5] B. Andreianov and K. Sbihi, *Well-posedness of general boundary-value problems for scalar conservation laws*, Transactions AMS, accepted; HAL preprint, hal.archives-ouvertes.fr/hal-00708973

[6] B. Andreianov and N. Seguin, *Well-posedness of a singular balance law*, Discr. Cont. Dyn. Syst. A 32(6), pp.1939-1964, 2012.

[7] C. Bardos, A.-Y. LeRoux, J.-C. Nédélec, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. PDE 4, 1017-1034, 1979.

[8] S.N. Kruzhkov, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Sbornik Math. 81, pp.217-243, 1970.

Boris ANDREIANOV, Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon, France
boris.andreianov@univ-fcomte.fr