

Analyse numérique de problèmes de contrôle pour des équations paraboliques

Franck BOYER, LATP, Aix-Marseille Université

Florence HUBERT, LATP, Aix-Marseille Université

Jérôme LE ROUSSEAU, MAPMO, Université d'Orléans

Considérons un problème parabolique linéaire de la forme

$$\partial_t y + Ay = 1_\omega v, \quad \text{dans } \Omega, \quad y(0) = y_0, \quad (P)$$

sur lequel agit un contrôle $v \in L^2(]0, T[\times \omega)$ distribué sur un sous-domaine ω de Ω .

On s'intéresse au problème de contrôle approché (peut-on construire v de sorte que $y(T)$ soit aussi petit que voulu ?) et au problème de contrôle à zéro (peut-on construire v de sorte que $y(T) = 0$?). D'un point de vue du système continu (P) , ces deux problèmes sont aujourd'hui bien compris (surtout dans le cas scalaire). Dans le cas où un tel contrôle existe, il est facile de voir qu'il en existe un unique de norme L^2 minimale (on dira *de coût minimum*) et c'est à ce contrôle particulier que l'on choisit s'intéresser.

Dans cet exposé, on abordera la question de la contrôlabilité (approchée ou à zéro) de systèmes discrets obtenus à partir de (P) dans le but d'approcher numériquement les solutions du problème de contrôle initial. Plus précisément, on s'intéressera à la fois à des semi-discrétisations en espace

$$\partial_t y_h + A_h y_h = 1_{\omega, h} v_h, \quad y_h(0) = y_{0, h}, \quad (P_h)$$

et à des discrétisations complètes de type Euler par exemple

$$\frac{y_h^{n+1} - y_h^n}{\Delta t} + A_h y_h^{n+1} = 1_{\omega, h} v_h^{n+1}, \quad \forall n \geq 0. \quad (P_{h, \Delta t})$$

Les questions naturelles qui se posent et auxquelles nous apportons des réponses dans [1, 2, 3, 4] sont:

- A h et/ou Δt fixé(s), existe-t'il un contrôle (semi-)discret pour (P_h) et/ou $(P_{h, \Delta t})$?
- Si oui, peut-on établir des bornes uniformes sur ces contrôles par rapport aux paramètres d'approximation et montrer ainsi la convergence de la méthode numérique ?
- Si non, que peut-on faire pour trouver quand même une approximation de la solution du problème initial ?
- Comment calculer, en pratique, ces contrôles (semi-)discrets ?

La méthode sur laquelle nous nous basons (HUM : Hilbert Uniqueness Method) est relativement ancienne et remonte aux travaux de Glowinski et Lions (voir par exemple [5]), mais nous en donnons une analyse nouvelle.

Celle-ci repose principalement sur la preuve et l'utilisation d'estimations d'énergie à poids pour les solutions de problèmes elliptiques ou paraboliques (semi-)discrets appelées *inégalités de Carleman discrètes* et que nous avons développées. Le cas des problèmes paraboliques scalaires semi-linéaires sera également discuté.

Je donnerai un aperçu des résultats de la littérature puis décrirai nos principales contributions, les grandes lignes des preuves et montrerai de nombreux résultats numériques, y compris dans des cas plus complexes que ceux concernés par nos résultats théoriques.

Références

- [1] F. BOYER, F. HUBERT, J. LE ROUSSEAU, *Discrete Carleman estimates and uniform controllability of semi-discrete parabolic equations*, J. Math. Pures Appl. **93**, 240–276, 2010.
- [2] F. BOYER, F. HUBERT, J. LE ROUSSEAU, *Discrete Carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications*, SIAM J. Control Optim. **48**, 5357–5397, 2012.

- [3] F. BOYER, F. HUBERT, J. LE ROUSSEAU, *Uniform null-controllability properties for space/time-discretized parabolic equations*, Numer. Math, **118** 601–661, 2011.
- [4] F. BOYER, J. LE ROUSSEAU, *Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations*, preprint, 2012.
- [5] CARTHEL, C., GLOWINSKI, R., LIONS, J.L., *On exact and approximate boundary controllabilities for the heat equation: a numerical approach*, J. Optim. Theory Appl. **82**(3), 429–484, 1994.

Franck BOYER, Laboratoire d'Analyse Topologie et Probabilités, Aix-Marseille Université, CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE Cedex 13

`fboyer@latp.univ-mrs.fr`

Florence HUBERT, Laboratoire d'Analyse Topologie et Probabilités, Aix-Marseille Université, CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13453 MARSEILLE Cedex 13

`fhubert@latp.univ-mrs.fr`

Jérôme LE ROUSSEAU, Laboratoire de Mathématiques - Analyse, Probabilités, Modélisation - Orléans (MAPMO), Fédération Denis Poisson, CNRS FR 2964, B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2

`jlr@univ-orleans.fr`