

La natation dans le miel ou l'Hélium liquide: un problème de contrôle linéaire et sans drift

François ALOUGES, CMAP, Ecole Polytechnique

La fabrication de nano-robots nageurs, à des fins médicales (par exemple pour effectuer de la chirurgie de façon non invasive ou du dépôt ciblé de médicament) réclame, outre une technologie extrêmement miniaturisée, une compréhension approfondie des mécanismes de natation dans l'eau à l'échelle microscopique. On trouve dans la nature de nombreux organismes microscopiques capables de nager dans l'eau (bactéries, paramécies, etc.) et plusieurs techniques semblent être utilisées. Ainsi, certains organismes utilisent des flagelles, des cils, ou bien se déforment, effectuant une nage plus proche de celle que l'on connaît.

Pourtant, le régime physique auquel sont confrontés ces microorganismes est totalement différent de celui que l'on rencontre plus grande échelle. En effet, le nombre de Reynolds de l'écoulement – nombre qui mesure l'intensité des effets inertiels par rapport aux effets visqueux – est très petit, de l'ordre de 0.00001 alors que dans les écoulements habituels (que l'on doit considérer pour un humain nageant dans l'eau, par exemple) ce nombre est typiquement de l'ordre de 100000.

Dans l'écoulement à faible nombre de Reynolds, l'inertie est complètement négligeable et l'on perçoit seulement la viscosité du fluide. À titre de comparaison, les écoulements de fluides dominés par la viscosité, comme la peinture, le miel ou le silicone, ou à très grande échelle, ceux que l'on trouve au sein des glaciers, sont à très faible nombre de Reynolds. Le bon modèle dans ce genre de régime est donné par les équations de Stokes qui sont des équations aux dérivées partielles linéaires.

Une particularité de ces écoulements, contre-intuitive, est d'être réversibles. Le fluide se déforme sous l'action d'une contrainte, mais ne se mélange pas. En imposant la déformation inverse, on revient à l'état initial. Cette propriété a été formalisée par E. M. Purcell [4], en 1977, sous la forme du théorème dit de la coquille Saint-Jacques qui stipule qu'un mouvement réciproque (comme celui obtenu par la coquille Saint-Jacques lorsqu'elle ouvre et referme sa coquille) ne peut pas produire de mouvement global. Une coquille Saint-Jacques ne peut nager que parce qu'elle évolue dans un écoulement à fort nombre de Reynolds.

Pour contourner l'obstruction précédente, Purcell [4] imagine un mécanisme comportant deux contrôles, une sorte de sous-marin avec un batteur à l'avant et un à l'arrière. Plus tard, en 2004, Najafi et Golestanian [3] décrivent un mécanisme plus simple – trois sphères alignées – lui aussi avec deux contrôles, susceptible d'avancer en ligne droite. Ce robot nageur a été mathématiquement étudié dans [1], où il est démontré qu'il peut effectivement nager dans un écoulement tridimensionnel à faible nombre de Reynolds.

En parallèle et de façon inattendue, A. Munnier a récemment montré (voir par exemple [2]) que les techniques de contrôle utilisées pour étudier la natation à faible nombre de Reynolds, s'appliquent aussi pour l'étude de la natation dans un fluide parfait et donc à nombre de Reynolds infini. L'équation gouvernant le fluide est là aussi linéaire, et l'équation donnant le déplacement de l'objet en fonction de sa déformation est encore un système de contrôle linéaire et sans drift.

Par la suite, on peut rechercher des façons de nager qui dépensent le moins d'énergie possible. Là encore, dans les deux cas (nombre de Reynolds faible ou infini dans un fluide parfait) on peut alors réécrire ce problème sous la forme de la recherche de géodésiques optimales dans un espace sous riemannien, et l'on peut utiliser ensuite des méthodes numériques (résolution d'équations différentielles, résolution d'équations aux dérivées partielles) pour approcher la solution exacte du problème.

L'exposé fera un point sur les récents développements dans ces domaines et mettra en parallèle les situations à faible ou fort nombre de Reynolds.

Ce domaine, à l'interface entre plusieurs disciplines (biologie, physique et mathématiques) nécessite aussi l'interaction de plusieurs domaines mathématiques différents (analyse, géométrie, analyse numérique, théorie du contrôle) pour pouvoir être abordé. Il est tout à fait représentatif du genre de questions que l'on se pose de nos jours en mathématiques appliquées.

Références

- [1] F. Alouges, A. DeSimone et A. Lefebvre, *Swimming at low Reynolds number at optimal strokes: An example*, J. of Nonlinear Sci. 18, no. 3, 277–302 (2008).
- [2] A. Munnier, *On the self-displacement of deformable bodies in a potential fluid flow*, Math. Models Methods Appl. Sci. 18(11):1945-1981 (2008).
- [3] A. Najafi et R. Golestanian, *Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres*, Phys. Rev. E 69, 062901 (2004).
- [4] E. M. Purcell, *Life at low Reynolds number*, American Journal of Physics vol 45, pages 3-11, 1977.
Disponible : http://jilawww.colorado.edu/perkinsgroup/Purcell_life_at_low_reynolds_number.pdf