

Un schéma Préservant l'Asymptotique pour des problèmes elliptiques anisotropes et ses applications pour le modèle Dynamo-3D du plasma ionosphérique

Chang YANG, USTL & INRIA

Christophe BESSE, USTL & INRIA

Fabrice DELUZET, IMT

Mots-clés : Schéma préservant l'asymptotique, Problèmes elliptiques anisotropes, Modèle Dynamo-3D du plasma ionosphérique

On présentera un schéma préservant l'asymptotique (AP) récemment introduit dans l'article [1] et son extension.

Ce schéma (AP) permet de résoudre un problème elliptique anisotrope de la forme

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = f, & \text{sur } \Omega, \\ \phi = 0, & \text{sur } \partial\Omega_D, \quad \partial_z\phi = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z, \end{cases} \quad (1)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine de bord $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_z$ et \mathcal{A} une matrice de diffusion de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{\perp} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_z \end{pmatrix}.$$

Les termes A_{\perp} et A_z sont du même ordre de magnitude, cependant le paramètre $0 < \varepsilon < 1$ peut être localement très petit provoquant donc l'anisotropie du problème. Si on fait tendre ε vers 0, le problème est mal-posé. L'idée du schéma (AP) est de décomposer l'inconnue ϕ en deux parties: sa moyenne $\bar{\phi}$ le long de l'axe z ; et sa fluctuation définie par $\phi' = \phi - \bar{\phi}$. Avec ces deux nouvelles inconnues, on décompose (1) en deux équations respectivement une équation pour la moyenne et une équation pour la fluctuation. En ajoutant la contrainte $\bar{\phi}' = 0$, le problème devient bien-posé.

Dans un premier temps, on prend ε constant et on résout le système elliptique itérativement en utilisant une méthode d'éléments finis. Dans une seconde étape, on choisit ε fonction de z contenant une grande variation en amplitude, et on combine avec le schéma de Scharfetter-Gummel pour obtenir un résultat plus précis. Enfin, on reformule le schéma (AP) et on présente les formulations variationnelles de l'équation de moyenne et de l'équation de fluctuation sous la forme d'un système linéaire.

Une application du schéma (AP) est pour le modèle Dynamo-3D du plasma ionosphérique [2]. Ce modèle contient une équation elliptique de la forme (1). La matrice de diffusion \mathcal{A} est dans ce cas la matrice de mobilités. La mobilité aligné le long du champ magnétique, à cause de la variation de plusieurs ordres de grandeurs de la fréquence de collision du plasma ionosphérique, prend le rôle de $\frac{1}{\varepsilon}$. On compare finalement les résultats avec le modèle striation en 2D [3].

Références

- [1] P. DEGOND, F. DELUZET, C. NEGULESCU, *An asymptotic preserving scheme for strongly anisotropic elliptic problems*, in printing, 2009.
- [2] C. BESSE, J. CLAUDEL, P. DEGOND, F. DELUZET, G. GALLICE, C. TESSIERAS, *A Model Hierarchy for Ionospheric Plasma Modeling*, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, Volume 14, Number 3, March 2004.
- [3] C. BESSE, J. CLAUDEL, P. DEGOND, F. DELUZET, G. GALLICE, C. TESSIERAS, *Numerical simulations of the ionospheric striation model*, Computer Physics Communications 176(2007) 75-90.

Chang YANG, Laboratoire Paul Painlevé, UMR 8524, Université Lille 1 - Sciences et Technologies & Équipe SIMPAF, INRIA Lille - Nord Europe

chang.yang@math.univ-lille1.fr

Christophe BESSE, Laboratoire Paul Painlevé, UMR 8524, Université Lille 1 - Sciences et Technologies & Équipe SIMPAF, INRIA Lille - Nord Europe

christophe.besse@math.univ-lille1.fr

Fabrice DELUZET, Institut Mathématique de Toulouse, Université Paul Sabatier

deluzet@mip.ups-tlse.fr