Propagation d'ondes dans des réseaux fractals 1D

Adrien SEMIN, INRIA Rocquencourt

Patrick JOLY, INRIA Rocquencourt

Nous sommes intéressés ici par la résolution de l'équation des ondes sur des domaines fractals tels que le poumon humain, qui peut être modélisé par un arbre dyadique infini modulo quelques approximations, comme dans [3, 4]. Comme il n'est pas possible de faire des simulations numériques sur la géométrie complète, l'idée est de restreindre la résolution à un nombre fini de générations, et de remplacer les générations restantes par un opérateur Dirichlet-to-Neumann, en supposant que sous-arbres que nous coupons sont auto-similaires, et en suivant une approche similaire aux travaux de Yves Achdou *et al* [1].

Dans notre communication, nous considérons un arbre fractal p-adique auto-similaire $\mathcal{T}$ (qui correspond à un des sous-arbres coupés du paragraphe précédent) donné par un générateur Σ et un ensemble de p similitudes directes strictement contractantes $(s_i)_{1\leq i\leq p}$ de rapport $\alpha_i < 1$ (ces éléments suffisent à définir de manière unique $\mathcal{T}$, la preuve est similaire à la preuve d'existence et d'unicité des AFC que l'on peut trouver dans [2]). Nous définissons un problème de Helmholtz (la pulsation est notée ω) sur $\mathcal{T}$ avec un poids $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'assertion suivante: $\mu = 1$ sur Σ, etil existe $(\mu_i)_{1\leq i\leq p}$ tel que $\mu \circ s_i = \mu_i\, \mu$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\mu u')' + \omega^2 \mu u & = & 0, \quad \text{dans } \mathcal{T}, \\ u & & \text{est continu en chaque noeud intérieur de } \mathcal{T}, \\ \displaystyle\sum_{\text{arêtes adjecentes au noeud}} \mu u' & = & 0, \quad \text{en chaque noeud intérieu de } \mathcal{T} \end{array}\right. \tag{1}$$

Les deux dernières lignes de (1) sont communément appelées conditions de Kirchhoff. Nous complétons ce problème en considérant une condition de "Neumann" ou de "Dirichlet" homogène à l'"infini" de l'arbre que nous définissons de façon variationnelle , et une donnée unité de Dirichlet à l'entrée de l'arbre. Si nous notons ℓ la longueur de Σ, et si nous notons $\Lambda(\ell,\omega)$ la trace de Neumann de la solution du probème de Helmholtz, alors nous avons les relations suivantes

$$\Lambda(\ell,\omega) = \frac{1}{\ell}\widetilde{\Lambda}(\ell\,\omega) \quad \text{avec} \quad \widetilde{\Lambda}(\sigma)\cos(\sigma) - \sigma\sin(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{\alpha_i}\left(\cos(\sigma) + \frac{\widetilde{\Lambda}(\sigma)}{\sigma}\sin(\sigma)\right)\widetilde{\Lambda}(\alpha_i\,\sigma) \tag{2}$$

Nous démontrons à quelle condition le problème (2) a une ou plusieurs solutions admissibles. De plus, plus on tronque loin dans le premier paragraphe, plus ℓ est petit, et il suffit donc de connaître une approximation basse fréquence (σ petit) de $\widetilde{\Lambda}$, ce qui nous permet de construire des conditions DtN approchées pour le problème de Neumann et pour le problème de Dirichlet. Finalement, nous validons les résultats obtenus numériquement.

Références

[1] Y. Achdou, C. Sabot, N. Tchou, *Transparent boundary conditions for the Helmholtz equation in some ramified domains with a fractal boundary*, Journal of Computational Physics, 220, 2007.

[2] G. A. Edgar, *Measure, Geometry, and Fractal Geometry*, Springer Verlag Editions, 1990.

[3] B. Maury, D. Salort, C. Vannier, *Trace theorems for trees, application for the human lung*, Network and Heteregenous Media, 4, 2009.

[4] E. R. Wiebel, *Morphometry of the Human Lung*, Springer Verlag and Academic Press, 1963.

Adrien SEMIN, INRIA Rocquencourt, Bâtiment 13, Domaine de Voluceau BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
`adrien.semin@inria.fr`
Patrick JOLY, INRIA Rocquencourt, Bâtiment 13, Domaine de Voluceau BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
`patrick.joly@inria.fr`