Potentiels vecteurs et problèmes elliptiques avec des conditions aux limites non standards

Nour El Houda SELOULA, Université de Pau & INRIA Bordeaux-Sud-Ouest

Chérif AMROUCHE, Université de Pau et des pays de l'Adour, LMA.

On s'intéresse à la théorie des potentiels vecteurs dans un domaine Ω borné tridimensionnel eventuellement non simplement connexe à bord Γ lipschitzien ou de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Le cadre hilbertien est déjà traité par C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge and V. Girault [1]. L'originalité de notre travail est de développer des résultats similaires en théorie L^p lorsque $1 < p < \infty$: existence, unicité et régularité. En particulier, plusieurs conditions aux limites sont proposées:

$$\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad \text{sur}\, \Gamma.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de ces potentiels vecteurs, on passe par la caractérisation des noyaux et la résolution de certains problèmes elliptiques, où parfois il est nécéssaire d'établir des conditions $inf - sup$. On s'intéresse ensuite à la régularité des potentiels vecteurs. Pour cela on a besoin de montrer des résultats d'injections dans des espaces fonctionnels adaptés et qui nécessitent d'établir deux types d'inégalité. Les deux font intervenir des représentations intégrales et l'inégalité de Calderòn Zygmund. Et enfin avec des décompositions d'Helmoltz adaptées on prouve aussi l'existence de potentiels trés faibles. En appliquant les résultats obtenus sur ces potentiels, on montre comment résoudre certains problémes elliptiques avec des conditions aux limites non standards:

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{n} = g, \quad \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{h} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} \quad \text{sur}\, \Gamma.$$

On traite une première situation où la divergence de $\boldsymbol{\xi}$ est nulle dans Ω, puis on généralise au cas d'une divergence non nulle.

Références

[1] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge and V. Girault, *Vector Potentials In Three-dimensional Non-smooth Domains*, Math. Meth. Applied Sc., Vol. 21, pp. 823–864, 1998.

[2] C. Amrouche, P. G. Ciarlet, P. Ciarlet, Jr , *Vector and scalar potentials, Poincar's theorem and Korn's inequality*, C. R. Math. Acad. Sci, Paris, Vol. 345, No. 11, pp. 603–608, 2008.

[3] J. bolik, W. Von. Wahl, *Estimating* ∇u *in terms of* $\operatorname{div} u$, $\mathbf{curl}\, u$ *either* (ν, u) *and* $(\nu \times u)$ *and the topology*, Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 20, pp. 737–744, 1997 .

Nour El Houda SELOULA, EPI Concha & LMA UMR CNRS 5142
INRIA Bordeaux-Sud-Ouest & Université de Pau
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 PAU Cédex
`nourelhouda.seloula@etud.univ-pau.fr`
Cherif AMROUCHE, Université de Pau
Avenue de l'Université - BP 1155
64013 PAU Cédex
`cherif.amrouche@univ-pau.fr`