

# Etude spectrale de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique dans un demi-espace

Nicolas POPOFF, IRMAR, Université Rennes 1

Il est bien connu des physiciens que lorsqu'on soumet un matériau supraconducteur à un champ magnétique trop intense, le matériau perd toutes ses propriétés supraconductrices et se comporte comme un matériau ordinaire. Lorsqu'on abaisse progressivement l'intensité du champ magnétique en dessous d'une valeur critique du champ, les premiers électrons supraconducteurs apparaissent sur le bord du matériau. La linéarisation des équations de Ginzburg et Landau au voisinage de cette valeur critique conduit à étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et condition de Neumann sur le bord.

Afin de comprendre l'influence de la géométrie du matériau sur l'apparition de la supraconductivité, il est nécessaire d'étudier certains cas modèles. Ainsi nous nous sommes intéressés au modèle du demi-espace avec un champ magnétique constant faisant un angle  $\theta$  avec le bord du domaine. Grâce à un changement de jauge et d'échelle suivis d'une transformation de Fourier partielle, le problème se ramène à étudier le spectre de la famille d'opérateurs à un paramètre  $\mathcal{L}_\theta$  (avec condition de Neumann) en dimension 2 sur le demi-plan  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$  :

$$\mathcal{L}_\theta = -\partial_s^2 - \partial_t^2 + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2.$$

Ces opérateurs ont déjà été partiellement étudiés dans [1, 2] : il a été montré que le bas du spectre essentiel de  $\mathcal{L}_\theta$  valait 1 pour toute valeur de l'angle  $\theta$ , et que le bas du spectre était une fonction de  $\theta$ , strictement croissante et analytique, prenant la valeur  $\Theta_0 \approx 0.59$  introduite dans [3], dans le cas d'un champ tangent ( $\theta = 0$ ) et la valeur 1 pour un champ perpendiculaire au bord ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

Nous avons pu raffiner ces résultats. À l'aide de la librairie d'éléments finis MÉLINA nous avons calculé le bas du spectre et les vecteurs propres associés en fonction de l'angle. Ces premières simulations numériques nous ont permis de mieux comprendre la localisation des vecteurs propres et nous avons démontré un résultat de localisation plus fin que ceux déjà existants, à savoir la concentration des modes dans la direction transverse à la droite où s'annule le "potentiel"  $(t \cos \theta - s \sin \theta)^2$ .

Nous avons aussi calculé numériquement les autres valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  situées sous le spectre essentiel, et avons noté qu'elles semblaient se densifier dans l'intervalle  $[\Theta_0, 1]$  lorsque l'angle  $\theta$  devenait petit, avec un comportement asymptotique bien précis. Nous sommes parvenus à démontrer que le nombre de valeurs propres tendait effectivement vers l'infini lorsque  $\theta$  tendait vers 0.

## Références

- [1] B.HELFFER, A.MORAME, *Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effect in the case of dimension 3*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 37 (1), 2004.
- [2] K. LU, X.-B. PAN, *Gauge invariant eigenvalue problems in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}_+^2$* , Trans. Amer. Maths. Soc. 352 (3), 2000.
- [3] M.DAUGE, B.HELFFER, *Eigenvalues variation. I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators*, J. Differential Equations 104 (2), 1993.

**Nicolas POPOFF**, IRMAR, université Rennes 1, 263 Avenue du General Leclerc, 35042 Rennes

`nicolas.popoff@univ-rennes1.fr`

**Dauge Monique**, IRMAR, Université Rennes 1

`monique.dauge@univ-rennes1.fr`

**Virginie Bonnaillie-Noël**, IRMAR, ENS Cachan Bretagne

`Virginie.Bonnaillie@Bretagne.ens-cachan.fr`