

Adaptation Optimale d'un Maillage pour l'approximation par Éléments finis

Jean-Marie MIREBEAU, Université Pierre et Marie Curie

Albert Cohen, Université Pierre et Marie Curie

Mots-clés : éléments finis anisotropes, maillages adaptatifs, interpolation, approximation non linéaire.

L'adaptation de maillage pour l'approximation des fonctions par ses éléments finis permet d'adapter localement la résolution en la raffinant dans les lieux de variations rapides de la fonction. L'utilisation de triangles anisotropes permet d'améliorer l'efficacité du maillage en introduisant des triangles longs et fins épousant notamment les directions des courbes de discontinuité. Dans notre travail on étudie le maillage *optimal* pour l'approximation en norme L^p . Plus précisément, étant donnée une fonction f définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et un entier $N > 0$, on recherche le maillage \mathcal{T}_N de Ω en N triangles tel que l'erreur d'interpolation $\|f - f_N\|_p$ entre f et son interpolée f_N par les éléments finis \mathcal{P}_m sur \mathcal{T}_N soit minimale. Un résultat connu borne cette erreur dans le cas d'une fonction $f \in C^2(\Omega)$ et des éléments \mathcal{P}_1 :

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} N \|f - f_N\|_p \leq C \|\sqrt{|\det(d^2 f)|}\|_\tau, \quad \text{où } \frac{1}{\tau} := 1 + \frac{1}{p}, \quad (1)$$

et où la constante C est universelle (indépendante de des données du problème f , Ω et p). En comparaison, si l'on se restreint aux triangulations composées de triangles "isotropes" (proches d'être équilatéraux), cette estimation devient $N \|f - f_N\| \leq C \|d^2 f\|_\tau$, pour la même valeur de τ . Autoriser l'anisotropie permet donc de remplacer la norme de la hessienne $\|d^2 f\|$ par la quantité plus petite $\sqrt{|\det d^2 f|}$, qui dépend non linéairement des dérivées de f . Sous des hypothèses raisonnables, on peut établir que (1) est optimale.

Notre travail [1, 2] étend ces résultats aux éléments finis de tous degré, lorsque l'erreur d'interpolation est mesurée en norme L^p mais aussi en norme de Sobolev $W^{1,p}$. Dans ce cadre, nous avons établi des estimations d'erreur similaires à (1), où le déterminant $\det(d^2 f)$ est remplacé par une quantité polynomiale en les dérivées d'ordre m de la fonction f . De nouveau nous avons pu établir que ces estimations sont optimales sous des hypothèses raisonnables.

A titre d'exemple, je développerai particulièrement le cas de l'interpolation par des éléments finis quadratiques \mathcal{P}_2 , quand l'erreur est mesurée en norme $H^1 = W^{1,2}$. C'est en effet le cas nouveau le plus susceptible d'être mis à profit dans des simulations numériques. Je donnerai des propriétés suffisantes pour qu'une triangulation mène à une erreur d'interpolation optimale à une constante multiplicative près. Je décrirai aussi la robustesse de nos résultats lorsque la triangulation construite possède des angles presque plats, car cette propriété est indésirable d'un point de vue théorique mais parfois inévitable sur le plan pratique. Ces résultats seront illustrés par des simulations numériques en FreeFem++.

Références

- [1] J.-M. MIREBEAU, *Optimally adapted meshes for finite elements of arbitrary order*, Constructive Approximation, 2010.
- [2] J.M. MIREBEAU, *Optimally adapted meshes for finite elements of arbitrary order and $W^{1,p}$ norms*, Submitted, 2010.