

Modèle à interfaces diffuses de type Cahn-Hilliard/Navier-Stokes et courants parasites

Sebastian Minjeaud, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

L'apparition de courants parasites [3] est un problème récurrent de nombreuses méthodes numériques (Volume Of Fluid, Level Set, Front Tracking, ...) de simulation d'écoulements comportant des interfaces soumises à la tension de surface. Il s'agit de vitesses de faible amplitude localisées au voisinage de l'interface, pouvant conduire à des instabilités et éventuellement à la rupture de l'interface. Ce phénomène est particulièrement visible sous forme de vitesses résiduelles non nulles et persistantes lors de simulations d'états d'équilibres stationnaires.

L'objectif de cette communication est d'expliquer pourquoi ces vitesses apparaissent et comment leurs amplitudes peuvent être limitées, au cours de simulations diphasiques bidimensionnelles à l'aide d'un modèle à interfaces diffuses de type Cahn-Hilliard/Navier-Stokes [1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \operatorname{div}(M \nabla \mu), & \mu = \frac{12\sigma}{\epsilon} f'(c) - \frac{3}{2} \sigma \epsilon \Delta c, \\ \sqrt{\rho(c)} \frac{\partial(\sqrt{\rho(c)} \mathbf{u})}{\partial t} + (\rho(c) \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{2} \operatorname{div}(\rho(c) \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\eta(c) D\mathbf{u}) + \nabla p = \mu \nabla c, & \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Le principe de ce type de modèle est de supposer que l'interface entre les deux fluides a une épaisseur strictement positive ϵ . L'inconnue c , appelée paramètre d'ordre est un indicateur de phase régularisé et les équations sont obtenues par minimisation d'une énergie mettant en concurrence un terme non linéaire $f(c)$ (en forme de double puits) modélisant la non-miscibilité des phases et un terme proportionnel à $|\nabla c|^2$ pénalisant la finesse des interfaces.

Nous effectuons la résolution numérique de ce système grâce à une discrétisation semi-implicite en temps qui permet de découpler les équations de Cahn-Hilliard de celles de Navier-Stokes dans chaque pas de temps. L'équation de Cahn-Hilliard est discrétisée à l'aide d'un schéma semi-implicite permettant de garantir la décroissance de l'énergie discrète en l'absence du terme de transport ($\mathbf{u}^n \cdot \nabla c^{n+1}$), et l'équation de Navier-Stokes par une méthode de projection incrémentale. La discrétisation en espace est réalisée par éléments finis conformes.

Les solutions à l'équilibre des équations du modèle vérifient $\mathbf{u} = 0$, $\mu = \text{constante}$ et $\nabla p = \mu \nabla c$. Pour que cette propriété puisse être conservée au niveau discret, il faut veiller à ce que le schéma numérique garantisse les points suivants :

- lorsque l'équilibre dans l'équation de Cahn-Hilliard discrète est atteint, μ_h doit être constant,
- lorsque μ_h est constant, la discrétisation du terme $\mu \nabla c$ doit être dans l'image du gradient discret,
- le schéma de résolution des équations de Navier-Stokes doit permettre d'obtenir la solution discrète $\mathbf{u}_h = 0$ lorsque le second membre est dans l'image du gradient discret.

Le premier point est naturellement garanti par l'approximation variationnelle utilisée. Pour que le second soit vérifié, il est crucial que la pression p et le paramètre d'ordre c soit discrétisés dans le même espace d'approximation. Enfin, le troisième point n'est pas vérifié par la méthode projection incrémentale standard. Nous proposons alors d'ajouter, en début de méthode, une étape de prédiction de pression visant à inclure directement dans la pression la "partie gradient" du second membre [2] et ainsi ne laisser dans l'étape de prédiction de vitesse que sa "partie solénoïdale". Des tests numériques montrent que cette modification permet de réduire les courants parasites aux erreurs d'arrondis ($\|\mathbf{u}\|_\infty = 2. \times 10^{-14}$).

Références

- [1] BOYER F., LAPUERTA C., MINJEAUD M., PIAR B., QUINTARD M., *Transp. Porous Media*, 2009.
- [2] GERBEAU J.-F., LE BRIS C., BERCOVIER M., *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 35(6), 1997.
- [3] SCARDOVELLI R., ZALESKI S., *Annual review of fluid mechanics*, 31, 1999.