Une estimation d'erreur faible pour la solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique à coefficients aléatoires

Julia CHARRIER, INRIA Rennes / ENS Cachan Bretagne

On considère une équation aux dérivées partielles elliptique à coefficients aléatoires :

$$-div(a(\omega,x)\nabla u(\omega,x)) = f.$$

Pour calculer la loi de la solution u, on peut utiliser une méthode de Galerkin stochastique [1] ou une mthode de collocation stochastique [2]. Ces deux méthodes sont basées sur une approximation en dimension finie a_N de a, on peut pour cela utiliser un développement de Karhunen-Loève (KL).
Nous nous sommes intéressés au cas où a est un champ lognormal homogène, i.e. $a = e^g$, avec g champ gaussien, ce type de champ apparaît fréquemment dans la modélisation de problèmes d'hydrogéologie. En tronquant le développement de KL de g, on obtient un champ approché

$$a_N = e^{\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\lambda_n}b_n(x)Y_n(\omega)},$$

on note alors u_N la solution de l'équation correspondante

$$-div(a_N(\omega,x)\nabla u_N(\omega,x)) = f.$$

Sous des hypothèses de décroissance du développement de KL, nous obtenons l'estimation d'erreur forte suivante, pour $\varepsilon > 0$:

$$\|u - u_N\|_{L^2_\omega H^1_0} \leq C(\varepsilon)\sqrt{\sum_{n>N}\lambda_n n^{\varepsilon}},$$

et l'estimation d'erreur faible :

$$\|\mathbb{E}[\varphi(u_N)] - \mathbb{E}[\varphi(u)]\|_{H^1_0} \leq C\sum_{n>N}\lambda_n.$$

On remarque que l'estimation d'erreur faible donne un ordre double de celui de l'estimation d'erreur forte. Ce résultat s'applique entre autres dans la cas d'une covariance exponentielle $cov[g](x,y) = e^{-\frac{\|x-y\|}{\ell}}$ sur un domaine rectangulaire, on illustrera numriquement cette erreur faible dans ce cas en dimension 1, en mettant en valeur l'influence de la longueur de corrélation ℓ.

Références

[1] I. Babuska, R. Tempone, G. Zouraris, *Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations*, SIAM J.Numer.Anal, 2004.

[2] I. Babuska, F. Nobile, R. Tempone , *A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data*, SIAM J.Numer.Anal, 2007.

[3] P. Frauenfelder, C. Schwab, R.A. Todor, *Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2005.

Julia CHARRIER, INRIA Rennes, campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex / Ens Cachan Bretagne, campus de Ker Lann, 35170 Bruz
julia.charrier@bretagne.ens-cachan.fr