Une méthode de volumes finis pour des écoulements multifluides

Stella KRELL, Université de Provence, LATP

Dans l'approximation d'écoulements multifluides visqueux incompressibles, après une discrétisation en temps, on est souvent amené à résoudre un problème de Stokes à viscosité variable. Nous proposons de présenter quelques résultats récents sur l'approximation par des méthodes DDFV (Discrete Duality Finite Volume) du problème de Stokes avec viscosité discontinue. Ces schémas volumes finis ont été initialement introduits dans [5] et étudiés dans [3] pour approcher l'équation de Laplace sur des maillages 2D très généraux, ne vérifiant en particulier pas nécessairement la condition d'orthogonalité classique des maillages volumes finis. L'approximation du problème de Stokes avec une viscosité réguliére par des méthodes DDFV a été traitée dans [6], en approchant la vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ simultanément aux centres et aux sommets des mailles du maillage initial, et la pression $p^{\mathfrak{D}}$ sur le maillage dit diamant (maillage où est localisé le gradient discret $\nabla^{\mathfrak{D}} : \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathcal{T}} \longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$). On peut alors construire une divergence discrète $\mathbf{div}^{\mathcal{T}} : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \left(\mathbb{R}^2\right)^{\mathcal{T}}$ en dualité avec ce gradient discret qui se traduit dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet homogène ($\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$) par la formule de Green suivante :

$$\forall \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}},\ \forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0, \quad -\int_\Omega \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\xi^{\mathfrak{D}}) \cdot \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \int_\Omega (\xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

Le schéma s'écrit alors: Trouver $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tels que,

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-2\eta^{\mathfrak{D}} \mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathfrak{D}} \mathrm{Id}) = \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \quad \mathrm{Tr}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + h_{\mathfrak{D}}^2 S^{\mathfrak{D}}(p^{\mathfrak{D}}) = 0, \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0, \tag{1}$$

avec $\mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t\left(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\right))$. Le terme $S^{\mathfrak{D}}(p^{\mathfrak{D}})$ est un terme de stabilisation nécessaire dans la preuve d'existence et d'unicité des solutions du schéma (1) pour des maillages généraux. Pour un choix de $S^{\mathfrak{D}}(p^{\mathfrak{D}})$ de type Brezzi-Pitkäranta (voir [2] et [4]), et une viscosité variable mais régulière, on obtient des estimations d'erreur d'ordre 1 en norme H^1 (resp. en norme L^2) pour la vitesse (resp. pour la pression). Dans le cas où la viscosité est discontinue, les résultats numériques dans [6] montrent que le schéma converge encore mais l'ordre de convergence n'est plus égal à 1. Cela vient du fait que les discontinuités de la viscosité impliquent un défaut de consistence des flux numériques. On propose de modifier le schéma afin de prendre en compte les sauts des coefficients et de retrouver un meilleur ordre de convergence. Comme dans le cas scalaire [1], on définit un nouveau gradient discret constant par quart de diamants. Ce qui permet d'introduire un nouveau tenseur des contraintes visqueuses constant par diamant, noté $\mathrm{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta,\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$. On remplace dans (1) $\eta^{\mathfrak{D}} \mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ (resp. $h_{\mathfrak{D}}^2 S^{\mathfrak{D}}(p^{\mathfrak{D}})$) par le nouveau tenseur des contraintes visqueuses $\mathrm{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta,\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$, (resp. une nouvelle stabilisation $h_{\mathfrak{D}}^2 S^{\mathfrak{D}}(p^{\mathfrak{D}}, \mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})$ qui prend en compte les sauts de pression). Ce schéma est bien posé et, pour un choix particulier de $S^{\mathfrak{D}}(p^{\mathfrak{D}}, \mathrm{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})$, il est même d'ordre 1 lorsque la viscosité est discontinue.

Références

[1] F. Boyer et F. Hubert, *Finite volume method for 2d linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities*, SIAM J. Numer. Anal., 46(6):3032–3070, 2008.

[2] F. Brezzi et J. Pitkäranta, *On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations*, W. Hackbush, Efficient Solution of Elliptic Systems, vol 10, 11-19, 1984.

[3] K. Domelevo et P. Omnes, *A finite colume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids* M^2AN, 39, n° 6, pp. 1203-1249, 2005.

[4] R. Eymard, R. Herbin et J.C. Latché, *On a stabilized colocated finite volume scheme for the Stokes problem*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 40(3) :501-527, 2006.

[5] F. Hermeline, *A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes*, J. Comput. Phys., 160(2) : 481-499, 2000.

[6] S. Krell, *Stabilized DDFV schemes for Stokes problem with variable viscosity on general 2d meshes*, à paraître dans Num. Meth. for PDEs, 2010. Available online at http://hal.archivesouvertes.fr/hal-00385687/fr/.

Stella KRELL, Université de Provence, Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités,
39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France
`krell@cmi.univ-mrs.fr`