

Schémas inconditionnellement stables pour les équations de Navier-Stokes compressibles

Walid Kheriji, IRSN, Cadarache

Jean-Claude Latché, IRSN, Cadarache

Raphael Herbin, Université de Provence

Mots-clés : Equations de Navier-Stokes compressibles, schéma de correction de pression, éléments finis, volume finis

Nous étendons aux équations de Navier-Stokes compressibles usuelles (*ie.* incluant le bilan d'énergie), les schémas de correction de pression développés dans [1] et [2] pour les équations de Navier-Stokes barotropes et le modèle de vitesse de dérive respectivement, et testés dans [3]. Formellement, une solution du problème continu satisfait les trois estimations suivantes : la conservation de l'énergie totale, la positivité de l'énergie interne e et la positivité de la masse volumique ρ , sous des hypothèses sur la loi d'état vérifiées par les fluides usuels, à savoir que la pression p , écrite comme une fonction de ρ et de l'énergie interne e s'annule pour $e = 0$ ($\forall \rho$) ou $\rho = 0$ ($\forall e$).

La discrétisation spatiale choisie est de type "à mailles décalées" : éléments finis mixtes non conformes (éléments finis de Crouzeix-Raviart ou Rannacher-Turek) ou schéma MAC (Marker-and-Cell) classique. Une discrétisation en volumes finis du bilan de masse, décentrée dans le sens de la vitesse, garantit la positivité de la masse volumique. La positivité de l'énergie interne est assurée grâce à une discrétisation du bilan d'énergie *ad hoc* : le terme de convection, décentré de la même manière, satisfait un principe du maximum discret, et l'approximation du terme $p \operatorname{div} u$, où u désigne la vitesse, s'annule pour $e = 0$. Cette dernière propriété nécessite que l'étape de correction de pression et le bilan d'énergie soient résolus de manière couplée, ce qui conduit à une semi-discrétisation en temps, à notre connaissance, originale. Enfin, une discrétisation particulière en volumes finis sur un maillage dual (mailles diamant) pour le terme de convection de vitesse dans le bilan de quantité de mouvement et une étape de renormalisation de la pression fournissent les derniers ingrédients nécessaires à la preuve de la décroissance de l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne, c'est à dire à un équivalent discret de la relation :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 + \rho e \right) dx \leq 0,$$

où Ω est le domaine physique.

Ce résultat de stabilité constitue, à notre connaissance, le premier résultat de ce type pour les équations de Navier-Stokes compressibles. Les estimations *a priori* qu'il fournit montrent en outre, par un argument de degré topologique, que le schéma obtenu est bien posé (*ie.* possède au moins une solution).

Références

- [1] T. GALLOUËT, L. GASTALDO, R. HERBIN, J.C. LATCHÉ, *An unconditionally stable pressure correction scheme for compressible barotropic Navier-Stokes equations*, M2AN, 2008.
- [2] L. GASTALDO, R. HERBIN, J.C. LATCHÉ, *An unconditionally stable finite element-finite volume pressure correction scheme for the drift-flux model*, M2AN, 2009.
- [3] W. KHERIJI, R. HERBIN AND J.-C. LATCHÉ, *Numerical tests of a new pressure correction scheme for the drift-flux model*, ECCOMAS, 2010.

Walid Kheriji, IRSN, Cadarache, BP 3- 13115, Saint-Paul-Lez-Durance Cedex, France
walid.kheriji@irsn.fr

Jean-Claude Latché, IRSN, Cadarache, BP 3- 13115, Saint-Paul-Lez-Durance Cedex, France
jean-claude.latche@irsn.fr

Raphael Herbin, Université de Provence, Centre de Mathématiques et Informatique, 39 rue Joliot Curie, 13453 Marseille 13, France
raphaele.herbin@latp.univ-mrs.fr