Méthode de Galerkin discontinue appliquée á la diffusion non linéaire dans les supraconducteurs.

A.Kameni[1], J. Lambrechts[2], J.F. Remacle[2], C. Geuzaine[1],

On propose la description de la densité de courant induite dans un supraconducteur de caractéristique non linéaire $J(E) \sim E^{\frac{1}{n}}$, avec $n > 1$. On résoud par une approche élements finis discontinus, le problème de diffusion scalaire non linéaire satisfait par le champ électrique:

$$(S) \begin{cases} \dfrac{\partial J(E)}{\partial t} - \dfrac{1}{\mu_0} \triangle E = 0 \\ \overrightarrow{\nabla} E \cdot \overrightarrow{\nu} = \left(\dfrac{\partial B_y}{\partial t}, -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \right) \cdot \overrightarrow{\nu} \\ E(t=0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec $B_{x,y}$ le champ magnétique appliqué et $\overrightarrow{\nu}$ la normale extérieure.
Avec ces méthodes éléments finis discontinus, le problème est résolu sur chaque élément du maillage doté d'un espace d'approximation polynomial d'ordre p. Les expressions de flux aux interfaces, qui sont très importantes dans ces approches, seront traités par une méthode de pénalisation [1]. On associera une méthode Runge Kutta d'orde 4 pour l'évolution temporelle.
Les méthodes Runge Kutta sont éfficaces pour résoudre des équations linéaires du type $\dfrac{dE}{dt} = f(t, E)$ (ex : $n = 1$). Dans notre cas ($n > 1$), le problème est non linéaire $\dfrac{dJ(E)}{dt} = f(t, E)$. On utilisera une caractéristique inverse $E(J) \sim J^n$ pour se ramener à $\dfrac{dJ}{dt} = g(t, J)$, avec $g(t, J) = f(t, J^n)$.
Le travail réalisé s'appuie sur un outil de maillage tridimensionnelle recemment développé, "Gmsh" (www.geuz.org/gmsh/). Cet outil propose des options de paramétrisation, de résolution, et de visualisation très efficaces et simples à utiliser [2]. Il permet de mailler facilement et rapidement des objets de formes diverses, et offre la possibilité de travailler avec des espaces polynomiaux de haut ordre.

Figure 1: Densité de courant dans une plaque supraconductrice: $p = 1$, $n = 20$, $B_x = t$ et $B_y = 0$. (gauche): $t = 0.25s$ (centre): $t = 0.5s$ (droite): $t = 0.75s$

Références

[1] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L.D. Marini *Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal, vol 39, number 5, p1749-1779, 2002.

[2] C. Geuzaine, J-F. Remacle, *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, Int. J. Numer. Meth. Eng, vol79, issue 11, p1309-1331, 2009.

A.Kameni[1], J. Lambrechts[2], J.F. Remacle[2], C. Geuzaine[1], [1]Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, Montefiore Institute Sart-Tilman, Bldg. B28, Parking P32 B-4000 Liège and [2] Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics, 4 Avenue George Lemaître, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgium.
`a.kameni@ulg.ace.be`