Une méthode de Gauge pour Navier-Stokes incompressible utilisant des ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

Souleymane KADRI HAROUNA, Laboratoire Jean Kuntzmann Université de Grenoble et CNRS

La méthode de Gauge [2] est une transformation des équations de Navier-Stokes incompressibles qui fait disparaître le terme de pression par un changement de variable :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla\mathbf{p} = f, \quad \text{dans} \quad [0,1]^d \\ \mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans} \quad [0,1]^d \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b, \quad \text{aux bords} \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{dans} \quad [0,1]^d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \partial_t \mathbf{a} - \mu\Delta\mathbf{a} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = f, \quad \text{dans} \quad [0,1]^d \\ \mathbf{a}\cdot\vec{\nu} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\nu}, \quad \mathbf{a}\cdot\vec{\tau} = \mathbf{u}_b\cdot\vec{\tau} + \frac{\partial\chi}{\partial\vec{\tau}}, \quad \text{aux bords} \\ \mathbf{u} = \mathbf{a} - \nabla\chi, \quad \text{dans} \quad [0,1]^d \\ \mathbf{p} = \partial_t\chi - \mu\Delta\chi, \quad \text{dans} \quad [0,1]^d \end{cases}$$

En pratique, ce qui coûte cher c'est le calcul de $\mathbf{u}$ à partir de $\mathbf{a}$. Les méthodes de discrétisation de type éléments finis ou différences finies utilisent en général un solveur de Poisson, faute de bases adaptées à la condition de divergence nulle. En conditions aux limites périodiques, les bases d'ondelettes à divergence ou à rotationnel nul de [1] permettent un calcul direct de la décomposition de Helmholtz-Hodge de $\mathbf{a}$, et ainsi d'obtenir $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{a} = \mathbb{P}(\mathbf{a}) + \mathbb{Q}(\mathbf{a}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{div}[\mathbb{P}(\mathbf{a})] = \mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}[\mathbb{Q}(\mathbf{a})] = 0$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de $L^2_{\text{per}}([0,1]^d)^d$ sur son sous-espace des fonctions à divergence nulle, et $\mathbb{Q}$ sur celui des fonctions à rotationnel nul. Cependant, dans le cas général, le problème du calcul de l'opérateur de Stokes $\mathbb{P}(-\Delta)$ se pose. L'objectif de notre communication est de présenter une extension des travaux de [1] basée sur la méthode de Gauge, avec des conditions aux limites physiques (Dirichlet, Neumann) sur $[0,1]^d$ [3]. L'efficacité de la méthode sera prouvée par la qualité des résultats numériques obtenus.

Références

[1] E. Deriaz, V. Perrier, Direct Numerical Simulation of Turbulence using divergence-free wavelets, *Multiscale Modeling & Simulation, SIAM* **7(3)** (2008) 1101–1129.

[2] W. E, J-G. Liu, Gauge method for viscous incompressible flows, *Comm. Math. Sci.* **1** (2003) 317–332.

[3] K. H. Souleymane, Ondelettes pour la Simulation des Grandes Échelles en Turbulence, *Thèse de l'Université de Grenoble*, en préparation.

Souleymane KADRI HAROUNA, Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK), Université de Grenoble et CNRS, B.P 53, 38401 Grenoble cedex 9, France
`souleymane.kadri-harouna@imag.fr`