Eléments finis discontinus pour la résolution de l'équation du transport en neutronique avec maillage triangulaire à bords courbes

Jean-Yves MOLLER, CEA Saclay

Mots-clés : éléments finis discontinus, neutronique, transport

Plusieurs méthodes existent pour modéliser les cœurs de réacteurs de centrale nucléaire: notamment les méthodes stochastiques (Monte Carlo), et les méthodes déterministes (les caractéristiques, les éléments finis). Une difficulté de la méthode des éléments finis est d'obtenir une représentation discrète exacte de la géométrie. Les cœurs de réacteurs sont constitués d'un assemblage de crayons combustibles cylindriques. Ces crayons doivent être maillés de manière la plus précise possible, ce qui nécessite pour le mailleur la prise en compte d'arcs de cercle. Les disques sont aujourd'hui approchés avec des triangles à bords droits dont les fonctions de base sont linéaires en les coordonnées cartésiennes et préservant les volumes. Afin de réduire, voire de supprimer, l'erreur d'approximation géométrique nous introduisons des éléments finis dont un côté est une portion de cercle et dont les fonctions de base sont définies à partir des fonctions de base sur les triangles à bords droits et à partir d'un C1-difféomorphisme allant du triangle droit au triangle courbe correspondant.
Rappelons que pour connaître la production d'énergie dans les cœurs de centrale, un problème de valeurs propres est résolu. Pour résoudre ce problème de valeurs propres, on résout itérativement un problème avec source de la forme:

$$L\psi = q \quad \text{avec} \quad L\psi = \Omega \cdot \nabla\psi + \sigma\psi$$

Ω est une direction des neutrons, et ψ le flux angulaire de neutrons. L'existence et l'unicité de la solution de cette équation sont données dans [1].
La résolution numérique sur la partition (en triangles) D_h du domaine D se fait grâce aux éléments finis discontinus maille après maille avec un choix de flux numérique sur les bords dit amont (ou "upwind") [2] :

$$\text{Trouver } \psi \in V_h \text{ telle que } \int_T (\Omega \cdot \nabla\psi + \sigma\psi)\, v + \int_{\partial T_-} \Omega \cdot n \left(\psi^+ - \psi^-\right) v = \int_T qv$$

avec $V_h = \left\{ v \in L^1(D_h)\,,\ v_{|T} \in P_k(T)\ \forall T \in D_h \right\}$.
Cette équation ne change pas entre les triangles courbes ou droits. Avec les éléments courbes, le domaine $D_h = D$ et une étape est rajoutée pour des mailles dont la direction est à la fois entrante ($\Omega \cdot n < 0$) et sortante ($\Omega \cdot n > 0$) : un point de tangence existe sur l'arc de cercle. La maille est divisée en 2 sous-mailles résolues successivement. Puis le flux est projeté sur la macro-maille pour mettre à jour la source de l'itération suivante. La projection faisant intervenir des intégrales courbes est seulement approchée et introduit une erreur.
Les tests numériques révèlent une meilleure précision sur la valeur propre. Résultat attendu puisque les calculs sont plus coûteux. Mais il est intéressant de noter que l'on gagne quasiment un degré de raffinement dans le maillage pour obtenir la même valeur propre. D'un autre côté l'effet devient rapidement négligeable lorsque le ratio (Nombre de triangles courbes)/(Nombre de triangles droits) diminue.

Références

[1] R. Dautray, J-L. Lions, *Analyse mathmatique et calcul numrique pour les sciences et les techniques*, Masson, Vol. 9, chap. XXI, 1985.

[2] A. Ern, J-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer, Applied Mathematical Sciences, vol 159, 2004.

Jean-Yves MOLLER, CEA Saclay, DEN/DANS/DM2S/SERMA/LLPR, 91191 Gif sur Yvette, France
jean-yves.moller@cea.fr